УДК 532.5+536.2

В.И. Волков, Д.Ю. Козлов

Оценка капиллярного поднятия

В ряде задач гидравлики требуется оценка высоты поднятия столба жидкости, что производится с использованием формулы Лапласа. При этом учитывают кривизну мениска жидкости [1]. В данной работе приведен вывод формул для высоты поднятия жидкости в плоском и цилиндрическом капиллярах, исходя из постоянства объема капиллярного поднятия жидкости вблизи плоской стенки.

Уравнение для кривой $h(x)$ [2], описывающей форму мениска, причем ось x направлена вверх вдоль вертикальной стенки,

$$\frac{d^2h/dx^2}{\left(1+\left(dh/dx\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{\rho g x}{\sigma}. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет решение

$$h(x)=\pm\left[\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\operatorname{arch}\left(2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g x^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}\sqrt{2-\frac{\rho g x^2}{2\sigma}}+const\right]. \qquad (2)$$

Выберем положительную ветвь, соответствующую правому краю мениска жидкости, что показано на рисунке 1.

Обезразмерим выражение (2) на характерный размер $J=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$, обозначив безразмерные координату и функцию следующим образом:

$$y=\frac{x}{J};\ g(y)=\frac{h(x)}{J} \qquad (3)$$

В новых переменных уравнение (2) запишется так:

$$g(y)=\frac{1}{2}\operatorname{arsech}(y)-\sqrt{1-y^2}+c. \qquad (4)$$

Запишем граничные условия в точке (т. А на рис. 1) трехфазного контакта для этой задачи:

$$g(y)\big|_{y=y_A}=0,\ \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=y_A}=\operatorname{tg}\theta, \qquad (5)$$

где θ – краевой угол.

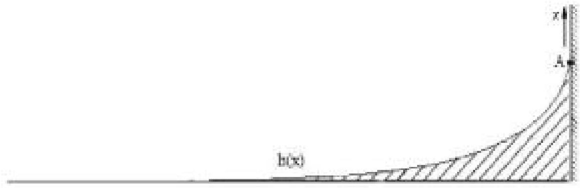

Рис. 1. Кривая $h(x)$, описывающая форму мениска жидкости

Выражения (5) позволяют определить y_A и константу c из уравнения (4).

Получим

$$y_A=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}.$$

Точка А лежит правее нуля, поэтому перед корнем выберем знак плюс. Тогда

$$c=-\frac{1}{2}\operatorname{arsech}\left(\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}\right)+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{2}},$$

а уравнение (4) запишется в виде

$$g(y)=\frac{1}{2}\operatorname{arsech}(y)-\sqrt{1-y^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arsech}\left(\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}\right)+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{2}}. \qquad (6)$$

Определим площадь I, содержащуюся под кривой $g(y)$:

$$I=\int_0^{y_A}g(y)dy=\frac{\cos\theta}{4}. \qquad (7)$$

Полная площадь S, выраженная через размерные величины,

$$S=I\cdot J^2=\frac{\sigma}{\rho g}\cos\theta. \qquad (8)$$

Функция (6) довольно громоздка, что не очень удобно для качественного анализа. Как показывают вычисления (при $\theta=0$), эту функцию можно аппроксимировать более простой зависимостью:

$$f(y)=-\frac{1}{2}\ln(y)-\frac{1}{\sqrt{10}},$$

что дает достаточно хорошую точность (относительная разница менее 1%) при вычислении интеграла (7).

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Рассмотрим теперь практические следствия (8) для плоского и цилиндрического капилляров.

Для вычисления объема жидкости V, заключенного между двумя плоскими протяженными параллельными пластинами, необходимо умножить площадь (8) на значение смоченного периметра трехфазного контакта:

$$V = 2lS = \frac{2l\sigma}{\rho g}\cos\theta\,, \qquad (9)$$

где l – ширина пластин.

Предположим, что при сближении пластин (рис. 2) заключенный между ними объем жидкости V останется постоянным. При этом вырастет высота столба жидкости H. Значение объема можно найти из формулы

$$V = l2RH, \qquad (10)$$

где $2R$ – расстояние между пластинами. Приравнивая уравнения (9) и (10), определим максимальную высоту поднятия жидкости:

$$H = \frac{\sigma}{R\rho g}\cos\theta\,. \qquad (11)$$

Для цилиндрической симметрии соотношения (9–10) запишутся следующим образом:

$$V = 2\pi RS = \frac{2\pi R\sigma}{\rho g}\cos\theta = \pi R^2 H\,.$$

Тогда для цилиндрического капилляра максимальная высота поднятия жидкости составит

$$H = \frac{2\sigma}{R\rho g}\cos\theta\,. \qquad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что расчет, исходящий из требования постоянства объема жидкости в капилляре, без учета кривизны мениска, приводит к классическому выражению для высоты капиллярного поднятия жидкости. Однако этот способ представляется более универсальным, поскольку не предполагает сферической формы мениска, что подразумевается в классическом способе [1] и является некоторым упрощением, а, как видно из рисунка 1, мениск далеко не сферичен и связь между радиусом кривизны мениска и радиусом капилляра получить весьма непросто.

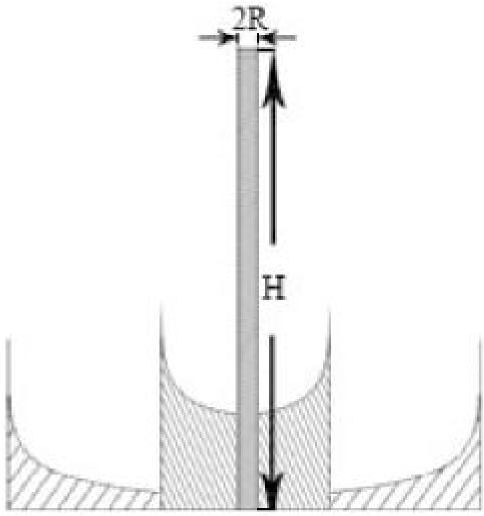

Рис. 2. Иллюстрация капиллярного поднятия жидкости вследствие сближения пластин

Таким образом, соотношения (11–12) совпадают с классическими выражениями для высоты поднятия жидкости в плоском и цилиндрическом капиллярах, но физические предпосылки, из которых получены эти выражения, несколько отличаются от общепринятых. Можно сказать, что задача по поднятию жидкости в опущенном в широкий сосуд капилляре свелась к задаче распределения постоянного объема несжимаемой жидкости по капиллярной щели с уменьшением ее поперечных размеров при виртуальном удалении капилляра из широкого сосуда.

Следует отметить, что соотношения (11–12) не согласуются с некоторыми экспериментальными данными (см., например, [3]). В частности, это связано с тем, что в расчете высоты поднятия совершенно не учитываются адгезионные свойства поверхности капилляра, а учитывается только коэффициент поверхностного натяжения между газом и жидкостью. Как показали эксперименты, высота поднятия жидкости существенно зависит от материала, так, для капилляров из стекла с молибденовыми присадками значение высоты поднятия оказалось в 1,2 раза выше, чем в стеклянных капиллярах без присадок.

Литература

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М., 1987.

2. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М., 1952.

3. Лескова С.С. Диагностика свойств жидкости на границах раздела гетерогенных сред / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Барнаул, 2006.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com