

В.И. Волков, Д.Ю. Козлов, Е.Р. Кирколуп  
**Исследование динамики движения жидкости по капилляру**

Наличие поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости может в некоторых случаях существенно сказываться на режиме движения жидкости. Это влияние существенно, когда поверхность раздела обладает конечной кривизной и когда пограничное натяжение является переменным от точки к точке на поверхности жидкости [1]. В задачах капиллярной гидродинамики важно правильно оценить скорость заполнения капилляров, в том числе время движения жидкости до остановки и скорость старта жидкости в начале заполнения. Подобные проблемы встречаются в различных прикладных задачах химической технологии. Так, в работе [2] численным методом решалась задача заполнения цилиндрического капилляра проводящей жидкостью, в результате чего было установлено время заполнения капилляра и стартовая скорость заполнения капилляра в поперечном магнитном поле. Численно можно решить полученное нелинейное уравнение, которым описывается капиллярное затекание жидкости, используя современные вычислительные методы на базе компьютерных технологий. Однако сложно анализировать зависимость полученного решения от параметров задачи. Поэтому в предлагаемой работе сделана попытка получения не только численного решения уравнения затекания жидкости в капилляр, но и поиск аналитического аналога, который позволит предсказать динамику капиллярного движения при изменении физических условий задачи.

Рассмотрим ток жидкости по цилиндрическому капилляру и запишем уравнение движения:

$$\frac{dp}{dt} = F_L - F_{HS} - F_{HD}, \tag{1}$$

где  $F_L$  – сила Лапласа, обусловленная поверхностным натяжением;  $F_{HS}$  и  $F_{HD}$  – силы, связанные с гидростатическим и гидродинамическим давлениями.

Для капилляра, расположенного под углом  $\nu$  к горизонтали, уравнение (1) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left( z \frac{dz}{dt} \right) = \frac{2\sigma}{R\rho} - g(z - z_d) \sin(\beta) - \frac{2\nu\theta}{R^2} z \frac{dz}{dt}, \tag{2}$$

где  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $R$  – радиус капилляра;  $z$  – длина растекания жидкости в капилляре;  $z_d$  – длина погруженного в жидкость участка;  $\eta$  – вязкость жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $u$  – параметр, определяемый из усреднения градиента скорости по сечению капилляра.

Можно показать, что для установившегося пуазейлевского течения это усреднение приводит к значению  $8/3$ :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{2V^* r}{R^2} 2\pi r \cdot dr,$$

$$\text{или после интегрирования } \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = \frac{8}{3} \frac{V_0}{R}, \text{ где } V_0 -$$

средняя расходная скорость.

Для данного течения профиль скорости, по крайней мере на границе раздела мениска жидкости со стенкой капилляра, не совпадает с пуазейлевским, так как мениск жидкости движется с ненулевой скоростью.

Эксперимент проводился на установке, схематично изображенной на рисунке 1.

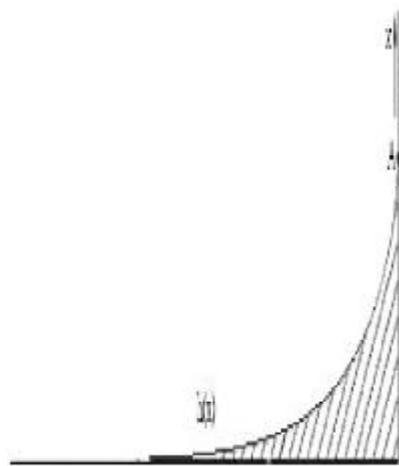


Рис. 1. Схема установки для исследования динамики поднятия жидкости в капилляре

Обезразмерим уравнение (2) на характерный размер, равный высоте максимального поднятия жидкости в поле тяжести:

$$h = \frac{2\sigma}{R\rho g}, \tag{3}$$

и временной масштаб

$$\tau = \sqrt{\frac{h}{2g}}. \quad (4)$$

В безразмерных переменных уравнение (2) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 1 + z_d \sin(\beta) - \sqrt{u} \sin(\beta) - \frac{2\nu\theta\tau}{R^2} \frac{du}{dt}, \quad (5)$$

где оставлено прежнее обозначение для безразмерного времени  $t$ , а  $u = z^2$ . Для численного решения уравнения (5) начальные условия в безразмерном виде запишутся с учетом глубины погружения  $z_d$  так:

$$u(t)|_{t=0} = (l_0 + z_d)^2, \\ \frac{du}{dt}|_{t=0} = 2z \frac{dz}{dt}|_{z=z_0} = 2(l_0 + z_d)V_0. \quad (6)$$

Для численного решения дифференциального уравнения (5) использовался метод Булирша-Штёрра, а затем производился переход от переменной  $u$  к  $z = \sqrt{u}$ . Результаты численного решения уравнения (2) представлены на рисунке 2, где приведена зависимость длины растекания  $z$  от времени в стеклянных капиллярах различного диаметра.

Для получения аналитической зависимости изменим исходное выражение таким образом, чтобы полученное аналитическое решение было близко к численному решению и соответствова-

ло экспериментальным данным. Запишем нелинейное уравнение (5) в виде

$$\frac{d^2w}{dt^2} = 1 - w \sin^2(\beta) - \frac{2\nu\theta'\tau}{R^2} \frac{dw}{dt}. \quad (7)$$

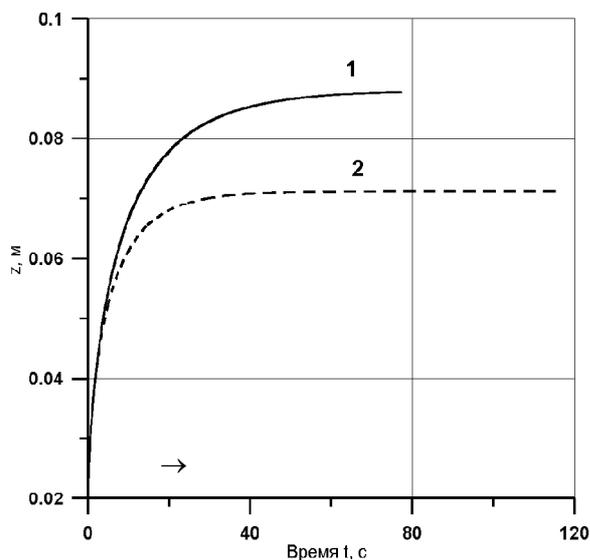
Таким образом, вместо  $\sqrt{u} \sin \beta$  в одном из слагаемых уравнения (5) появляется его квадрат, равный  $w \sin^2 \beta$ . Кроме того, чтобы сохранить одинаковые точки старта и остановки движения жидкости, получаемые из уравнений (5) и (7), уровень начала отсчета  $w$  выбираем совпадающим с уровнем жидкости, в отличие от уравнения (5), в котором отсчет начинается от края капилляра, погруженного в жидкость. Поэтому  $\sqrt{w} \sin(\beta)$  в уравнении (7) имеет тот же смысл, что и  $h$  на рисунке 1. Аналитическое решение выражения (7) известно и описывает апериодические колебания:

$$w(t) = \frac{1}{\sin^2(\beta)} + c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}, \quad (8)$$

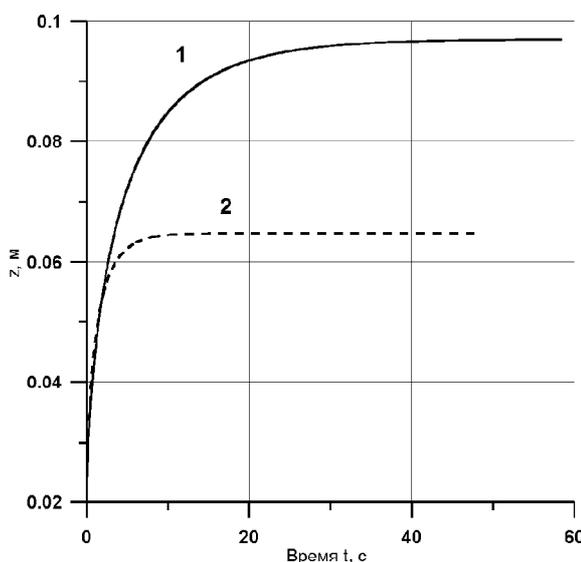
где

$$s_{1,2} = -\frac{\nu\theta'\tau}{R^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu\theta'\tau}{R^2}\right)^2 - \sin^2(\beta)},$$

а постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются из начальных условий:



а)



б)

Рис. 2. Зависимость длины растекания жидкости в цилиндрических капиллярах от времени:  
а) численное решение для капилляров диаметрами: 1 – 0,31 мм, 2 – 0,34 мм ( $\sin \beta = 0,5$ );  
б) численное решение для капилляров диаметрами: 1 – 0,59 мм, 2 – 0,94 мм ( $\sin \beta = 0,25$ )

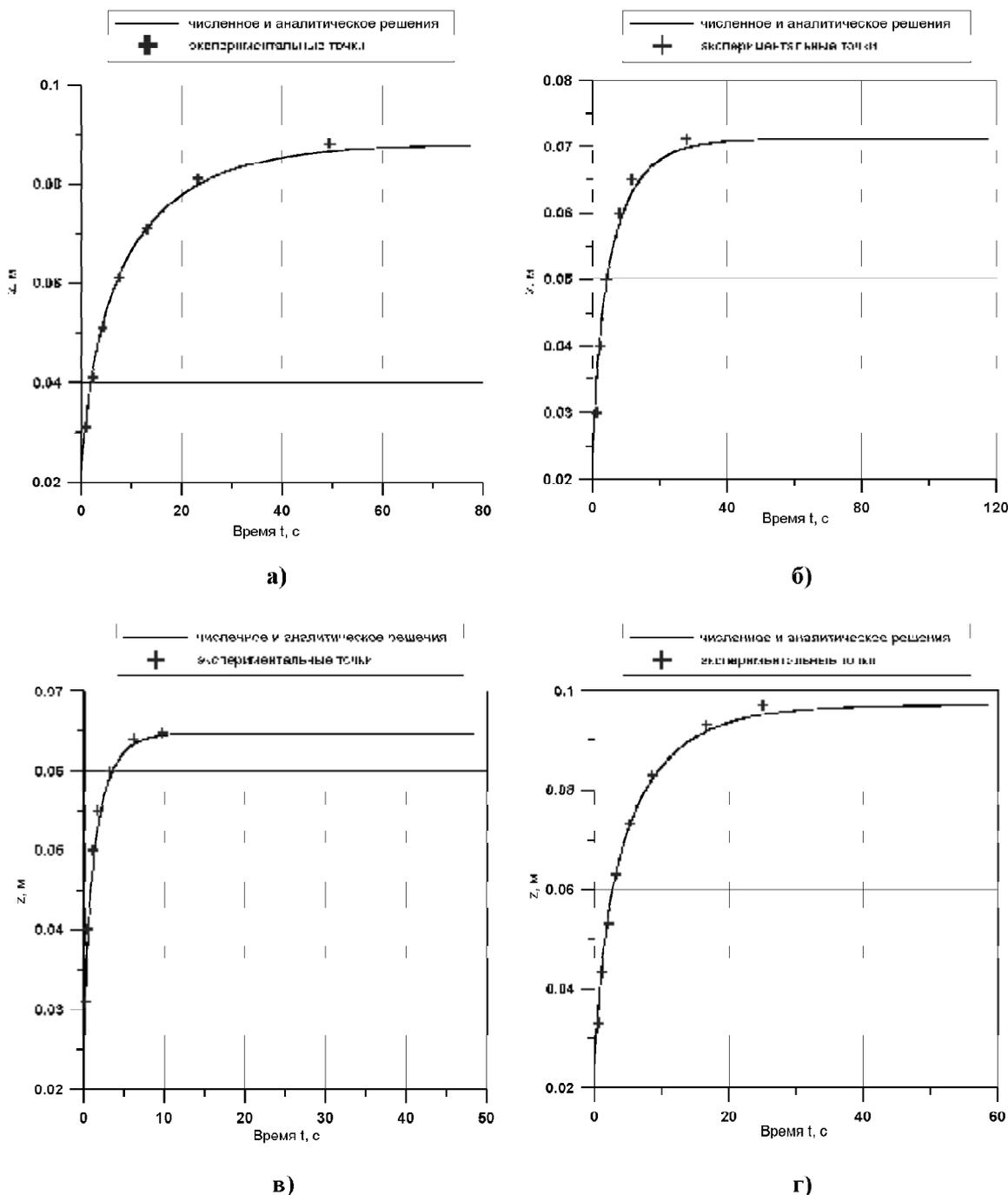


Рис. 3. Зависимость длины растекания жидкости в цилиндрических капиллярах от времени: а) диаметр капилляра  $d = 0,31$  мм; б) диаметр капилляра  $d = 0,34$  мм; в) диаметр капилляра  $d = 0,59$  мм; г) диаметр капилляра  $d = 0,94$  мм

$$w(t)|_{t=0} = l_0^2, \quad \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = 2l_0V_0, \quad (9)$$

где  $l_0$  – начальная длина растекания, отсчитываемая от уровня жидкости;  $V_0$  – начальная скорость, в качестве которой выберем  $0,02$  м/с – полученное экспериментально максимальное значение скорости в капиллярах.

Как показал численный счет, решение практически не зависит от этого параметра в пределах его изменения от 0 до  $0,02$  м/с. Чтобы сделать возможным сравнение полученной кривой и аналитического решения (8) уравнения (7), необходимо также выделить корень, а затем добавить смещение на глубину погружения  $z_d$ . Две эти кривые приводят к одинаковой точке оста-

Экспериментальные данные динамики поднятия 96%-го спирта по цилиндрическим капиллярам

d, мм	t, с	$\Delta t_{cp}$	z, м	$\Delta z_{cp}$ , мм	$\sin \beta$	$z_d$ , м	h, м	$\theta$	$\theta'$
0,31	0,92	0,18	0,031	0,0005	0,5	0,0065	0,0408	8	15
	2,23	0,2	0,041	0,0005					
	4,21	0,22	0,051	0,0005					
	7,47	0,29	0,061	0,0005					
	13,07	0,21	0,071	0,0005					
	23,23	0,47	0,081	0,0005					
49,4	2,45	0,088	0,0005						
0,34	1,07	0,19	0,03	0,0005	0,5	0,0036	0,0338	6,5	12
	2,13	0,21	0,04	0,0005					
	3,99	0,26	0,05	0,0005					
	7,72	0,46	0,06	0,0005					
	11,41	0,98	0,065	0,0005					
	27,72	5,24	0,0711	0,0012					
0,59	0,53	0,19	0,033	0,0005	0,25	0,004	0,0233	6,8	12
	1,12	0,18	0,043	0,0005					
	1,92	0,18	0,053	0,0005					
	3,19	0,13	0,063	0,0005					
	5,09	0,18	0,073	0,0005					
	8,45	0,25	0,083	0,0005					
	16,57	0,2	0,093	0,0005					
	24,97	0,63	0,097	0,0005					
0,94	0,16	0,05	0,031	0,0013	0,25	0,001	0,0159	6,1	11
	0,45	0,05	0,0401	0,0009					
	1,08	0,1	0,05	0,0005					
	1,71	0,21	0,055	0,0005					
	3,17	0,47	0,06	0,0005					
	6,17	0,46	0,064	0,0009					
	9,71	0,58	0,0647	0,001					

новки натекания, но динамика её достижения различается. Чтобы добиться их согласия, требуется в приближенном уравнении (8) увеличить вклад последнего слагаемого за счет подбора  $\theta$ . В дальнейшем это найденное экспериментально значение коэффициента при усреднении градиента скорости будем обозначать  $\theta'$ .

Провели эксперименты по динамике заполнения стеклянных капилляров диаметрами 0,31; 0,34; 0,59 и 0,94 мм. В качестве исследуемой жидкости брали 96%-й спирт. В ходе эксперимента стеклянные капилляры, погруженные в широкий сосуд со спиртом, устанавливали под такими углами, чтобы  $\sin \beta$  принимал значения 0,25; 0,5. Меньший угол выбирался для капилляров большего диаметра с целью достижения большего значения длины растекания. Для фиксации процесса эксперимента производилась цифровая видеосъемка с разрешением 1024x768 пикселей и частотой 15 кадров в секунду. Затем происходила обработка видеосъемки на компьютере, и экспериментальные значения сравнивались с полученными выше численными и аналитическими зависимостями. Результаты экспериментов приведены в таблице и показаны на графиках рисунка 3.

Далее для каждого капилляра производилось сравнение экспериментальной зависимости с двумя теоретическими, которые обсуждались выше. Оценка показывает, что для используемых нами капилляров удается добиться хорошего согласия теории и эксперимента при  $\theta \approx 6-8$  и  $\theta' \approx 11-15$ , и при учете длин их погружения  $z_d$ .

**Основные результаты и выводы.** Из сравнения точного решения и экспериментальных данных следует, что значение максимальной скорости превышает расходную скорость более чем в 6 раз. Единственной силой, поднимающей жидкость вверх по капилляру против силы тяжести, является сила адгезии между жидкостью и стенкой капилляра, и эта сила распределена вблизи поверхности. Таким образом, можно предположить, что скорость жидкости вблизи стенки цилиндрического капилляра имеет максимальное значение, существенно превышающее и среднее значение скорости, и скорость в центре капилляра. А так как на самой стенке капилляра скорость равна нулю, то в данной задаче вместо трения скольжения жидкости, по всей видимости, осуществляется трение качения жидкого валика вдоль внутренней поверхности капилляра.

Любопытно отметить, что в экспериментах с вертикальным капиллярным движением воды наблюдалось не равномерное движение мениска, а, скорее, скачкообразное. Это можно трактовать как некоторый колебательный процесс с затуханием. Видимо, это явление имеет место и для других жидкостей, просто при экспериментах с водой, имеющей самое высокое значение коэффициента поверхностного натяжения, оно более выражено.

Еще один немаловажный результат заключается в том, что удалось построить приближенное аналитическое решение нелинейного уравнения процесса заполнения жидкостью цилиндрического капилляра и получить удовлетворительное согласие численного и приближенного решений с экспериментальными данными.

### Литература

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М., 1952.
2. Канчукоев В.З. Определение начальной скорости и продолжительности движения жидкости в капиллярах / В.З. Канчукоев, Б.С. Карамурзов, В.А. Созаев, В.В. Чернов // ИФЖ. – 2003. – Т. 76. – №1.