

УДК 333.93

Л.А. Хворова, О.А. Иванова

Методологические основы математического моделирования гидротермического режима почвы в зимний период

В моделировании агроэкосистем наиболее разработанной является проблема формирования водно-теплового режима почв для теплового полугодия. В данной работе рассмотрено формирование водно-теплового режима в холодный период года. За основу взята монография Е.М. Гусева [1], в которой представлен комплекс физико-математических моделей формирования гидротермического режима почвы в холодное полугодие.

Зимний режим запасов почвенной влаги определяется в основном двумя процессами:

1. Обогащением запасов почвенной влаги за счет талых вод и атмосферных осадков в период оттепелей.

2. Внутрипочвенным передвижением воды в парообразном и жидком виде в верхние слои почвы, которое обеспечивает поступление ее в значительных количествах.

Зимний период влажности почвы для периода времени от перехода среднесуточной температуры воздуха через 5°C осенью до перехода ее через 5°C весной.

Холодный сезон характерен тем, что в отдельные его периоды основными являются разные стороны гидротермических процессов в почвенном профиле, поэтому для разных этапов рассматриваемого сезона предлагается [1] строить свою модель, отражающую основную физическую сущность процесса именно для этого этапа.

В работе [1] предлагается выделение следующих характерных периодов:

1. Промерзание почвы под снежным покровом, сопровождающееся миграционным подтоком воды со стороны талой зоны и длящегося фактически с момента наступления отрицательных температур до схода снежного покрова.

2. Предвесенний период, характерной чертой которого является относительно малое изменение глубины промерзания и сформировавшегося снежного покрова непосредственно перед снеготаянием.

3. Весеннее снеготаяние и впитывание талых вод в почву.

4. Оттаивание почвы после схода снежного покрова.

5. Зимние оттепели.

Каждый из отмеченных характерных периодов формирования гидротермического режима почвы определяет содержание соответствующей частной модели, а совокупность их представляет законченный комплекс моделей формирования почвенных вод в зимне-весенний период.

Зимний период характеризуется тем, что с момента наступления отрицательных температур воздуха большая часть осадков выпадает в твердом виде (снег, иней, изморозь), накапливаясь на поверхности почвы в виде снежного покрова и гололеда, а в глубь почвы распространяется зона с температурами ниже 0°C . В результате для полевых агроэкосистем можно выделить три характерных слоя: снежный покров, мерзлая зона почвы, ее талая зона. Для каждой из указанных зон можно записать в соответствующей форме уравнения тепло-, влагопереноса, которые являются основой описания гидрологических и гидрофизических процессов формирования почвенных вод. Далее все характеристики, используемые в подобных уравнениях и связанные с соответствующим слоем, будут иметь индексы: 1 – для снежного покрова; 2 – для мерзлой почвы; 3 – для талой. Теплогидрофизические параметры талой и мерзлой почвы зависят от типа почвы, ее плотности, влажности и льдистости.

В качестве экспериментального варианта расчета промерзания почвы взят один из простых приближенных методов, в значительной мере отражающий физические закономерности процесса и в то же время использующий очень простой математический аппарат. В его основу положено известное уравнение для скорости продвижения фронта промерзания ξ [1]:

$$L^* \frac{d\xi}{dt} = q_M - q_T,$$

$$L^* = L\rho_W(W - u_n) + \frac{c_2|T_{II}|}{2}, \quad (1)$$

где q_T – кондуктивный поток тепла к границе промерзания со стороны талой зоны, q_M – кондуктивный отток тепла от границы промерзания в талую зону.

В данном варианте расчета динамики промерзания почвы ограничимся случаем, когда влиянием миграции воды со стороны талой зоны на тепловой режим почвы можно пренебречь.

Рассмотрим приходную и расходную составляющие теплового баланса в уравнении (1). Наиболее простой и в то же время достаточно обоснованный подход к определению оттока тепла в мерзлую зону основан на принципе квазистационарности поля температур в мерзлом слое [1]. В силу этого принципа профиль температур в мерзлой зоне, а также в вышерасположенном слое снега принимается линейным, зависящим только от геометрии системы и ее граничных условий (речь здесь идет о температуре, усредненной по некоторому интервалу времени, отфильтровывающему высокочастотную составляющую ее колебаний, связанную, например, с суточным ходом). В этом случае отток тепла в мерзлую зону

$$q_M = -\frac{\lambda_2 T_c}{\xi + H},$$

где $H = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} h$ – приведенная высота снега, а температура поверхности почвы

$$T_H = \frac{T_c \xi}{\xi + H}.$$

В работе рассмотрен вариант учета теплового потока со стороны талой зоны при произвольном характере движения фронта промерзания (необязательно $t^{1/2}$, как в задаче Стефана), использующий достаточно простой алгоритм.

В основу расчета положен интегральный метод теплового баланса [1]. При этом также будем считать, что на больших глубинах температура почвы постоянна и равна некоторой среднегодовой температуре T^* , измеренной на максимальной возможной глубине почвенного профиля, или температуре грунтовых вод при большой (10 – 20 м) глубине их залегания. Отличия же от этой постоянной температуры имеются в некоторой верхней части почвенного профиля, испытывающего влияние динамики поверхностных термических процессов. Именно эту часть почвенного профиля будем для краткости называть глубиной проникания и обозначать σ . Идея введения характерной, меняющейся со временем глубины, ниже которой влияние динамики термических процессов у поверхности еще не распространилось, встречалась и ранее в ряде работ по промерзанию и достаточно себя оправдала. В той части талой зоны, которую захватывает глуби-

на проникания, аппроксимируем профиль температуры параболической зависимостью от z , где z – вертикальная координата:

$$T_3 = \hat{A}z^2 + \hat{B}z + \hat{C} \quad (2)$$

Здесь коэффициенты \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} – функции времени.

С учетом условий на границах ξ и σ

$$T_3(\xi) = 0; \quad (3)$$

$$T_3(\sigma) = T^* \quad (4)$$

и условия непрерывности потока на σ

$$\left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{\sigma} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (2) приведем к виду

$$T_3 = T^* - T^* \frac{(z - \sigma)^2}{(\xi - \sigma)^2}. \quad (6)$$

Соответственно поток тепла со стороны талой зоны к границе промерзания будет равен

$$q_T = \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{\xi} = \frac{2\lambda_3 T^*}{\sigma - \xi}, \quad (7)$$

где λ_3 – коэффициент теплопроводности талой зоны.

Таким образом, зная положение на данный момент времени границы промерзания ξ и глубины проникания σ , фактически знаем поток тепла q_T , что дает возможность замкнуть уравнение (1).

Приведем задачу расчета динамики глубины проникания σ . При этом за нулевой момент времени принимается момент перехода температуры поверхности через 0 °С. Интегрируя по z в пределах от ξ до σ уравнение теплопроводности для талой зоны

$$c_3 = \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}, \quad (8)$$

где c_3 – объемная теплоемкость талой почвы, получим

$$\begin{aligned} & \frac{c_3}{\lambda_3} \left[\frac{d}{dt} \int_{\xi}^{\sigma} T_3 dz - T_3(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} + T_3(\xi) \frac{d\xi}{dt} \right] = \\ & = \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{\sigma} - \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{\xi}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом равенства (6) последнее уравнение приведем к виду

$$\frac{d(\sigma - \xi)}{dt} + 3 \frac{d\xi}{dt} = 6 \frac{a_3}{\sigma - \xi}, \quad (10)$$

где $a_3 = \frac{\lambda_3}{c_3}$ – температуропроводность талой зоны.

Введем обозначение $g = \sigma - \xi$. Тогда окончательно формулировку задачи динамики глубины проникания запишем в виде

$$\frac{d(g^2)}{dt} + 6g \frac{d\xi}{dt} = 12a_3 \quad (11)$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = 0, \quad g(0) = g_0. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (11), получим

$$g^2(t) - g_0^2 + 6 \int_0^{\xi(t)} g d\xi = 12a_3 t. \quad (13)$$

Используя теорему о среднем, оценим интеграл в (13):

$$\int_0^{\xi(t)} g d\xi \approx \frac{1}{2} g(t) \xi(t), \quad (14)$$

что приводит к

$$g^2(t) + 3g(t)\xi = g_0^2 + 12a_3 t. \quad (15)$$

И окончательно

$$g(t) = -\frac{3}{2}\xi + \sqrt{\frac{9}{4}\xi^2 + 12a_3 t + g_0^2}; \quad (16)$$

$$q_T = \frac{2\lambda_3 T^*}{\sqrt{\frac{9}{4}\xi^2 + 12a_3 t + g_0^2} - \frac{3}{2}\xi};$$

$$L^* \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\lambda_2 T_C}{\xi + H} - \frac{2\lambda_3 T^*}{\sqrt{\frac{9}{4}\xi^2 + 12a_3 t + g_0^2} - \frac{3}{2}\xi}. \quad (17)$$

Приняв $H \equiv 0$, $T_C = T_{II} = const$, а также $g_0 = 0$, придем к задаче Стефана, точное решение которой имеет вид

$$\xi = \beta t^{1/2}, \quad (18)$$

где β есть решение некоторого трансцендентного уравнения, содержащего T_{II} , T^* и теплофизические параметры почвы. Можно показать, что приближенное решение задачи Стефана, основанное на уравнении (17), также имеет вид (18), причем

$$\beta = \frac{a_3^{1/2}}{\left\{ -\tilde{A} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \tilde{A} \right) + \frac{1}{2} \frac{L^* a_3}{\lambda_3 T^*} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \tilde{A} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{L^* a_3}{\lambda_2 T_C}} \right] \right\}^{1/2}}, \quad (19)$$

где $\tilde{A} = \frac{\lambda_3 T^*}{\lambda_2 T_C}$. Заметим, что равенство (14), запи-

санное как приближенное, в этом случае является точным.

Приняв гипотетические, но типичные по порядку величин следующие значения параметров:

$$T^* = -T_C = 10^0 C, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 10^{-3} \text{ кал}/(\text{см град с}),$$

$$c_2 = c_3 = 1 \text{ кал}/(\text{см}^3 \text{град}), \quad L\rho_W(W - u_H) = 15 \text{ кал}/(\text{см}^3),$$

получим в случае точного решения задачи Стефана и ее приближенного решения, основанного на интегральном методе теплового баланса, соответственно $\beta = 0,022 \text{ см}/\text{с}^{1/2}$ и $\beta = 0,0217 \text{ см}/\text{с}^{1/2}$. Таким образом, ошибка при упрощенном расчете глубины промерзания с использованием равенства (17) при типичных по порядку величин значениях параметров в примере задачи Стефана не превышает 2%, что вполне приемлемо в гидрологических расчетах.

Рассмотрим определение величины начальной глубины проникания g_0 . В первом приближении можно считать, что поверхностный слой начинает охлаждаться и соответственно развивается глубина проникновения с того момента времени, когда температура поверхности почвы становится меньше T^* . В рамках выбранного приближения примем, что температура поверхности с того момента времени, когда она равна T^* , до момента наступления нулевой температуры

$$\text{изменяется линейно, т.е. } T_{II} \approx T^* \left(1 - \frac{t}{\tau^*} \right), \quad (20)$$

где τ^* – интервал времени между указанными моментами.

Профиль температуры в пределах глубины проникания с учетом условия на границах $z = 0$ и $z = \sigma$ зададим в виде

$$T_3 = T^* - (T^* - T_{II}) \frac{(z - \sigma)}{\sigma^2}. \quad (21)$$

Интегральная форма уравнения теплопроводности выглядит в этом случае следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_0^\sigma T_3 dz - T_3(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} = a_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_\sigma - a_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_0 \quad (22)$$

и с учетом уравнений (20) и (21) дает

$$\frac{d(\sigma^2)}{dt} + 2 \frac{\sigma^2}{t} = 12a_3, \quad (23)$$

при начальном условии

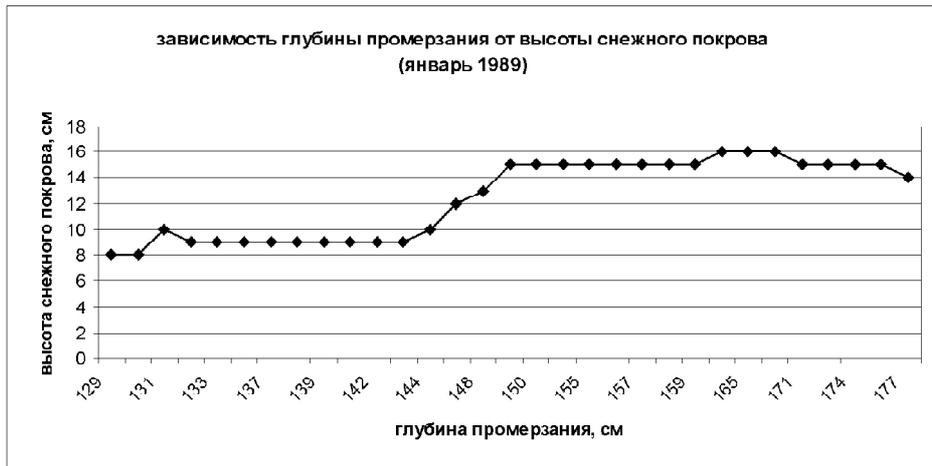


Рис. 1. Зависимость глубины промерзания почвы от высоты снежного покрова в январе 1989 г.

$$\sigma(0) = 0. \tag{24}$$

Решением задачи (23), (24) является

$$\sigma = 2\sqrt{a_3 t}, \tag{25}$$

откуда

$$g_0 = \sigma(\tau^*) = 2\sqrt{a_3 \tau^*}. \tag{26}$$

Подставив уравнение (26) в (17), получим окончательно

$$q_T = \frac{2\lambda_3 T^*}{\sqrt{\frac{9}{4}\xi^2 + 12a_3(t+t_0) - \frac{3}{2}\xi}}; \tag{27}$$

$$L^* \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\lambda_2 T_C}{\xi + H} - \frac{2\lambda_3 T^*}{\sqrt{\frac{9}{4}\xi^2 + 12a_3(t+t_0) - \frac{3}{2}\xi}}, \tag{28}$$

где $t_0 = \frac{\tau^*}{3}$.

Умножив уравнение (28) на $(\xi + H)$ и проинтегрировав полученное равенство по t от t_1 до $t_2 = t_1 + \Delta t$, получим следующий вариант рекуррентной формулы пошагового расчета глубины промерзания:

$$\xi(t_2) = -H(t_2) - \frac{q_T(t_1)\Delta t}{L^*} + \sqrt{\left[\xi(t_1) + H(t_2)\right]^2 - \frac{2\lambda_2 T_C \Delta t}{L^*(t^2)} + \left[\frac{q_T(t_1)\Delta t}{L^*(t_2)}\right]^2}. \tag{29}$$

Общее теплосодержание мерзлой зоны

$$I = \int_0^\xi dz \int_0^{T(z)} c_{эф}(T') dT' = \int_{T_H}^0 \frac{dz}{dT} dT \int_0^{T(z)} c_{эф}(T') dT'. \tag{30}$$

Здесь $c_{эф}$ – эффективная теплоемкость мерзлой почвы, являющаяся функцией температуры почвы,

$$c_{эф} = c_0 + L\rho_W \frac{\partial u_H(T)}{\partial T}, \tag{31}$$

где c_0 – аддитивная объемная теплоемкость в отсутствие фазовых переходов, $u_H(T)$ – зависимость от температуры количества незамерзающей воды. Учитывая, что

$$\frac{dz}{dT} = -\frac{\xi}{T_H}, \tag{32}$$

имеем

$$L^* = \frac{dI}{d\xi} = -\frac{1}{T_H} \int_0^T dT \int_0^T c_{эф}(T') dT'. \tag{33}$$

Интегрирование уравнения (33) с учетом (31) дает

Таблица 1
Фактическая и расчетная глубина промерзания почвы (январь 1989 г.)

Число месяца	Фактическая глубина промерзания, см	Расчетная глубина промерзания, см	Отклонение
1	129	127	2
2	130	130	0
3	131	132	1
4	132	133	1
5	133	134	1
6	135	136	1
7	137	137	0
8	138	138	0
9	139	139	0
10	141	140	1

Таблица 2

Фактическая и расчетная глубина промерзания почвы (апрель 1989 г.)

Число месяца	Фактическая глубина промерзания, см	Расчетная глубина промерзания, см	Отклонение
1	212	213	1
2	212	212	0
3	212	211	1
4	211	211	0
5	211	210	1
6	210	209	1
7	210	209	1
8	208	209	1
9	207	208	1
10	207	208	1

$$L^* = L\rho_W W - L\rho_W \frac{\int_0^{T_{II}} u_H(T) dT}{T_{II}} - \frac{c_0 T_{II}}{2} = L\rho_W W - L\rho_W u_H^{-T_{II}} - \frac{c_0 T_{II}}{2}, \quad (34)$$

где $u_H^{-T_{II}} = \frac{\int_0^{T_{II}} u_H(T) dT}{T_{II}}$ – среднее в диапазоне температур

($0 \dots T_{II}$) количество незамерзшей воды. При интегрировании учтена непрерывность по температуре зависимости $u_H(T_{II})$, т.е. $u_H(0) = W$.

Таким образом, в общем случае коэффициент L^* определяется выражением (34). Однако во многих случаях для описания зависимости $u_H^{-T_{II}}(T_{II})$ можно использовать ее линейную аппроксимацию, т.е. представить

$$u_H^{-T_{II}} = a + bT_{II}, \quad (35)$$

где a и b – аппроксимационные коэффициенты.

В результате с учетом равенства (35) имеем

$$L^* = L\rho_W(W - a) - (2L\rho_W b + c_0) \frac{T_{II}}{2} \quad (36)$$

и в качестве необходимых для расчета промерзания параметров u_H и c_2 соответственно полагаем

$$u_H = a; \quad (37)$$

$$c_2 = c_0 + 2L\rho_W b. \quad (38)$$

Теплопроводность снега рассчитывалась по формуле Янсона, связывающей коэффициент теплопроводности снега в кал/(с см град) с его плотностью ρ_1 в г/см³: $\lambda_1 = 10^{-3}(0,05 + 1,9\rho_1 + 6\rho_1^4)$.

Для апробации модели глубины промерзания почвы использовались материалы наблюдений Каменской метеорологической станции.

При изучении модели глубины промерзания почвы проведены численные эксперименты по выявлению зависимости глубины промерзания

почвы от высоты снежного покрова. На рисунке 1 представлена зависимость глубины промерзания почвы от высоты снежного покрова по материалам наблюдений Каменской метеорологической станции.

На данном этапе рассмотрен упрощенный вариант расчета глубины промерзания почвы по формуле $\xi = at^{1/2} + b$, где коэффициенты a и b определяются методом наименьших квадратов. Для первой декады января 1989 г., когда идет промерзание почвы, значения коэффициентов равняются $a = 5,647449$, $b = 121,8112$, т.е. уравнение имеет вид $\xi = 5,647449t^{1/2} + 121,8112$. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Для первой декады апреля 1989 г., когда идет оттаивание почвы, значения коэффициентов равняются $a = -2,57105$, $b = 215,7767$, уравнение имеет вид $\xi = -2,57105t^{1/2} + 215,7767$. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

В настоящее время закончен предварительный этап по изучению гидротермического режима почв в зимний период: собраны экспериментальные данные [2], проведен анализ существующих моделей, проведены численные эксперименты с упрощенными моделями. В дальнейшем предполагается запустить всю комплексную модель, описывающую гидротермический режим почв в зимний период, и использовать результаты расчетов для оценки процесса формирования урожая озимых культур.

Литература

1. Гусев Е.М. Формирование режима и ресурсов почвенных вод в зимне-весенний период. – М., 1993.
 2. Хворова Л.А. Задача типизации агрометеорологических условий вегетационного периода озимых

культур с использованием алгоритмов распознавания образов / Л.А. Хворова, О.А. Иванова // Материалы IX краевой конференции по математике. – Барнаул, 2006.