УДК 519.6:532.5

С.С. Кузиков

К методам численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости

Исследование течений неоднородной жидкости представляет интерес как в теоретическом отношении, так и для решений многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии и т.д. Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения жидкости. Одним из проявлений указанного фактора является возможность выборочного изъятия определенных слоев водной массы из устойчиво стратифицированного водоема. Обзоры литературы по аналитическим и численным методам исследования стратифицированных течений проводятся в работах [1, 2, 3, 4]. Построены [1, 3] решения стационарных уравнений в случае линейной зависимости плотности от функции тока, но они позволяют лишь качественно оценить картину течения. Показано, что при $Fr > \frac{1}{\pi}$ областей с возвратным течением нет, а для $Fr < \frac{1}{\pi}$ начинается образование зон возвратных течений. Подобная задача решена [5] посредством последовательного уточнения границы раздела области селективного отбора и области «возвратного» течения, в которой предполагалось отсутствие течения.

Обзор результатов о корректности некоторых постановок краевых задач для нестационарных течений дан в работе [6, гл. 4]. Изучались [7, 8] стационарные течения однородной жидкости. Для этой же постановки выделили [8] класс функций, в котором имеется единственность решения. Для нестационарного случая доказана [9] теорема существования в случае, когда на участке втекания задается нормальная составляющая вектора скорости и вихрь, а на «выходе» – нормальная составляющая вектора скорости.

В данной работе предложен метод численного расчета плоского течения идеальной неоднородной жидкости для различных вариантов граничных условий. Указанные течения в поле силы тяжести описываются системой дифференциальных уравнений [10]

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}; \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \qquad (2)$$

$$\Delta\psi = -\omega; \qquad (3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad (4)$$

где $u(x, y), v(x, y)$ – компоненты вектора скорости, $\rho(x, y)$ – плотность, $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ – завихренность, $\psi(x, y)$ – функция тока, $Fr = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{gH\Delta\rho}{\rho_0}}}$ – плотностное число Фруда, v_0 – характерная скорость, g – ускорение свободного падения, H – характерный размер области течения, $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$, ρ_0 – характерная плотность жидкости.

Решение системы (1)–(4) будем искать в области $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, граница которой состоит из трех участков: Γ_0 – непроницаемая часть, Γ_1 – участок втекания, Γ_2 – участок вытекания, причем

$$\Gamma_0 = \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{y = 1,\ 0 \le x \le 1\} \cup$$
$$\cup \{x = 1,\ 0 \le y \le a,\ b \le y \le 1\};$$
$$\Gamma_1 = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\};$$
$$\Gamma_2 = \{x = 1,\ a < y < b\},\ 0 \le a < b \le 1.$$

Для системы дифференциальных уравнений (1)–(4) поставим следующие краевые условия.

На Γ_1:

$$\psi = \psi_1(y)\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} > 0\right), \qquad (5)$$

$$\omega = \omega_1(y), \qquad (6)$$

$$\rho = \rho_1(y)\ (0 \le \rho_1 \le 1); \qquad (7)$$

на Γ_0:

$$\psi = 0, \quad (0 \le x \le 1,\ y = 0) \cup (x = 1,\ 0 \le y \le a), \qquad (8)$$

$$\psi = \psi_0 = const,$$
$$(0 \le x \le 1,\ y = 1) \cup (x = 1,\ b \le y \le 1); \qquad (9)$$

на Γ_2:

$$\psi = \psi_2(y)\ \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} > 0\right). \qquad (10)$$

В терминах вектора скорости граничные условия означают, что всюду на границе области

Ω задана нормальная составляющая вектора скорости и, кроме того, на участке втекания дополнительно известны значения вихря ω и плотности ρ, задаваемые соответственно функциями $\omega_1(y)$ и $\rho_1(y)$. Свойства функции $\psi_1(y)$ позволяют определить обратную функцию, т.е. $y = y_1(\psi)$.

Приведем некоторые свойства гладких стационарных решений задач (1)–(10), используемых при ее численном решении. Из уравнения (2) следует, что $\rho(x, y)$ сохраняет постоянное значение на линии тока $\psi = const$, т.е. $\rho = \rho(\psi)$.

Интегрируя уравнения (1) вдоль линии тока $\psi = const$, получим

$$\omega(y,\psi) = \omega_1(y_1(\psi)) + \frac{1}{Fr^2}\frac{\partial\rho(\psi)}{\partial\psi}(y - y_1(\psi)). \quad (11)$$

Функцию $\rho = \rho(\psi)$ доопределим следующим образом:

$$\rho(\psi) = \rho(0)\ \textit{при}\ \psi \le 0; \quad \rho(\psi) = \rho(\psi_1(1))\ \textit{при}\ \rho \ge 1.$$

Таким образом, уравнение (3) с правой частью (11) и условиями (5), (8)–(10) представляют собой задачу Дирихле для нелинейного уравнения Пуассона. Данную задачу решаем итерационным разностным методом переменных направлений, аппроксимируя уравнения (3) по обычной пятиточечной схеме:

$$\Delta_h\psi_{n,m} = \frac{\psi_{n+1,m} - 2\psi_{n,m} + \psi_{n-1,m}}{h_1^2} + $$
$$+ \frac{\psi_{n,m+1} - 2\psi_{n,m} + \psi n, m-1}{h_2^2} = -\omega(y_m, \psi_{n,m}), \quad (12)$$

$1 \le n \le N-1, \quad 1 \le m \le M-1, \quad h_1 = \frac{1}{N}, \quad h_2 = \frac{1}{M}$, где N, M – число разбиений области течения по оси X и Y соответственно, h_1 и h_2 – шаги сетки. Система уравнений (12) замыкается посредством задания краевых условий для сеточной функции $\psi_{n,m}$, определяемых соотношениями (5), (8)–(10).

При численном решении системы (12) значение $\psi_{n,m}$ в правой части берется с предыдущей итерации. После решения этой задачи находим $\rho_{n,m} = \rho(\psi_{n,m})$ и $\omega_{n,m} = \omega(y_m, \psi_{n,m})$. При малых числах Фруда образуются «застойные зоны», которые можно трактовать как твердое тело [5].

Литература

1. Yih C.S. Stratified flows. – New York, 1999. – P. 418.
2. Васильев О.Ф. Стратифицированные течения / О.Ф. Васильев, В.И. Квон, Ю.М. Лыткин, И.Л. Розовский // Гидромеханика. Т. 8 : Итоги науки и техники. – М., 1975.
3. Белолипецкий В.М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости / В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк, Ю.И. Шокин. – Новосибирск, 1991.
4. Белолипецкий В.М. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков / В.М. Белолипецкий, С.Н. Генова, В.Б. Туговиков, Ю.И. Шокин. – Новосибирск, 1994.
5. Ингбер М.С. Расчет истечения стратифицированной жидкости через слив с целью определения условия селективного отбора // Теоретические основы инженерных расчетов / М.С. Ингбер , А.К. Митра. – 1988. – №3.
6. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск, 1983.
7. Алексеев Г.В. Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1969. – Вып. 10.
8. Алексеев Г.В. Математические вопросы теории двумерных непотенциальных течений несжимаемой жидкости : Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1972.
9. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача протекания идеальной жидкости через область // Матем. сб., – 1964.
10. Кузиков С.С. Метод численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии / С.С. Кузиков, С.П. Семенов. – Новосибирск, 1995. – Т. 4. – №12.