

Т.К. Кронберг

К построению математической модели эритроцита в лазерной медицине

В клинической медицине решение ряда задач диагностики и терапевтического воздействия связано с прохождением излучения через кровь. Кровь состоит из плазмы с взвешенными в ней эритроцитами (красными кровяными тельцами), лейкоцитами и тромбоцитами. Основными рассеивающими объектами в крови являются эритроциты, так как их концентрация значительно превосходит концентрацию двух последних элементов. Эритроциты занимают около 40% объема крови. Столь плотная упаковка красных кровяных телец приводит к необходимости учета многократного рассеяния света. Часто единственным методом решения таких задач является метод статистического моделирования [1].

Случайное блуждание фотона в крови прослеживается от точки входа до его поглощения или до выхода, определяемой толщиной слоя крови. Длина свободного пробега t между двумя последовательными столкновениями с эритроцитами распределена с плотностью вероятностей

$$p(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \exp(-\tau / \tau_0)$$

и моделируется по формуле $\tau = \tau_0 \ln \gamma$, где τ_0 – средняя длина свободного пробега; γ – случайная величина с равномерным распределением на $[0,1]$. При расчете на компьютере γ получаются в результате применения подпрограммы RAND – датчика случайных чисел. Фотон рассеивается либо поглощается с вероятностями p_{sc} и $p_{ab} = 1 - p_{sc}$. После столкновения фотон движется в направлении, определяемом полярным θ и азимутальным ϕ углами. Азимутальный угол ϕ равномерно распределен на отрезке $[0, 2\pi]$. Полярный угол θ рассеяния фотона моделируется с плотностью распределения вероятностей – индикатрисой рассеяния.

Задача эмпирического нахождения индикатрисы рассеяния имеет фундаментальное значение для решения реальных задач, так как она обеспечивает адекватность построенной модели реальным процессам. Поскольку форма эритроцитов имеет случайный характер, случайную ориентацию в пространстве, может быть сильно изрезанной, в последнем случае для изучения формы эритроцитов, возможно, требуется привлечение теории фракталов [2]. Все это делает задачу эмпирического построения формы эритроцита и, как следствие, индикатрисы рассеяния

чрезвычайно сложной: требуется огромная статистическая выборка, по которой нужно построить многомерную плотность распределения, что весьма сложно, учитывая размеры эритроцитов.

В данной работе предлагается другой подход к нахождению индикатрисы рассеяния – ориентированный на задачи с многомерным рассеянием. Для конкретности рассмотрим задачу нахождения плотности распределения углов вылета фотонов из слоя крови.

На множестве функций – плотностей распределения $\psi(\theta)$ – индикатрис рассеяния естественно возникает оператор $A: \psi \rightarrow \gamma$, где $\gamma(\theta)$ – плотность распределения углов фотонов из слоя крови.

Функция $\gamma(\theta)$ реализуется после многочисленных рассеяний и мелкая (тонкая) структура функции $\psi(\theta)$ (локальные пики) «осредняется» в достаточно плавную функцию.

Поставим задачу: по известной $\gamma(\theta)$ восстановить $\psi(\theta)$. Эта задача, очевидно, является некорректной, т.е. малым изменениям функции $\gamma(\theta)$ могут соответствовать большие изменения функции $\psi(\theta)$; может в принципе отсутствовать и единственность решения. Но для нас важно получить «несложную функцию» $\psi(\theta)$, с помощью которой можно получить результаты, отражающие физическую реальность с удовлетворительной точностью. Причем процедура нахождения $\psi(\theta)$ не должна требовать очень сложных физических экспериментов.

Пусть полученная в результате экспериментов функция $g_\theta(\theta)$ задана гистограммой для углов $\theta \in [0, 90^\circ]$ с шагом $\Delta\theta$, т.е. если $\theta \in [i\Delta\theta, (i+1)\Delta\theta]$, $i = 0, \dots, N-1$, то $g_\theta(\theta) = g_i$, где g_i – вещественные числа.

В качестве базовой индикатрисы выберем индикатрису Хеньи-Гринштейна ([3]) и набор индикатрис $\{\Psi_k(\theta)\}$, $k = 1, \dots, M$, среди которых будем искать индикатрисы, дающие лучшее, чем индикатриса Хеньи-Гринштейна, совпадение с данными эксперимента. Такой выбор индикатрис можно задавать различными способами, например, как в [4], брать различные смеси индикатрис Хеньи-Гринштейна

$$p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}.$$

Одновременно для каждой траектории считаем веса

$$Q_{kl} = Q_{kl-1} \cdot \frac{\psi_k(\theta)}{p(\theta)},$$

где l – номер рассеяния в данной траектории, а все $Q_{k0} = 1$.

Для каждой индикатрисы $\Psi_k(\theta)$ строим соответствующую гистограмму $g_k(\theta)$ по углам вылета фотона из слоя крови, аналогичную гистограмме, полученной в эксперименте. Вклад в гистограмму $g_k(\theta)$ будет определяться конечным весом $Q_{k\xi}$, где ξ – номер последнего рассеяния фотона перед вылетом из слоя крови. Все $g_k(\theta)$ рассчитываются по одним и тем же траекториям.

В качестве критериев качества приближения наших гистограмм $g_k(\theta)$ к эмпирической гисто-

грамме $g_0(\theta)$ можно взять набор следующих функционалов:

$$\Phi_{1,k} = \sum_{i=1}^{N-1} (g_i - g_{ki})^2,$$

$$\Phi_{2,k} = \sum_{i=1}^{N-1} |g_i - g_{ki}|,$$

$$\Phi_{3,k} = \max_{1 \leq i \leq N-1} |g_i - g_{ki}|.$$

Здесь g_{ki} – величина i -го интервала в k -ой гистограмме, $k = 1, \dots, M$, g_{0i} соответствует индикатрисе Хенни-Гринштейна. Сравнивая $\Phi_{1,0}$, $\Phi_{2,0}$ со всеми другими $\Phi_{1,k}$, $\Phi_{2,k}$, $\Phi_{3,k}$, выбираем те индикатрисы, где функционалы качества будут наименьшими.

Литература

1. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М., 1985.
2. Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М., 1988.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. М., 1981. Т. 1.
4. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах пла-

нет. М., 1972.

5. Букатый В.И. Оптика атмосферы и океана / В.И. Букатый, Т.К. Кронберг, Д.В. Михеев 2001. Т. 14. №3.

6. Букатый В.И. Оптика атмосферы и океана / В.И. Букатый, Т.К. Кронберг. 2003. Т. 16. №2.