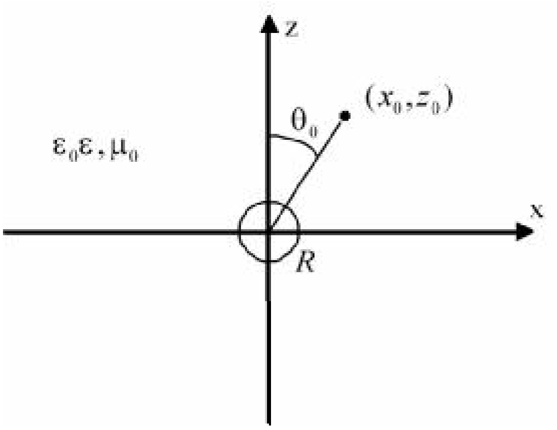
УДК 621.371

П.М. Зацепин, А.Ю. Рыкшин

Дифракция короткого электромагнитного импульса на импедансном цилиндре

Рассмотрена задача о дифракции короткого электромагнитного импульса на бесконечном проводящем цилиндре радиуса R с импедансом ZZ_0, где $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ – импеданс свободного пространства.

Геометрия задачи изображена на рисунке. Цилиндр, ось которого совпадает с осью Oy, расположен в бесконечном пространстве с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0\varepsilon$, где ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.



Геометрия задачи

Первичное поле создается сторонним источником в виде бесконечной вдоль оси y нити магнитного тока с координатами (x_0, z_0). Направление от источника на ось цилиндра характеризуется углом θ_0, отсчитываемым от оси z по часовой стрелке. Задача является двумерной, и $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. Поле задачи имеет вертикальную поляризацию с компонентами H_y, E_x, E_z.

Уравнения Максвелла данной задачи в цилиндрической системе координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r}\frac{\partial H_y}{\partial \varphi} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial r} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right) = -\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} - j_y^m. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь H_y – y-компонента напряженности магнитного поля; E_g и E_j – соответственно радиальная и угловая компоненты электрического поля; j_y^m – y-составляющая плотности магнитного тока; ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В дальнейшем примем магнитную проницаемость среды равной единице: $\mu = 1$.

Воспользовавшись системой уравнений (1), нетрудно получить волновое уравнение:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_y}{\partial r}\right) - \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j_y^m}{\partial t}. \quad (2)$$

Решая данное уравнение, найдем выражение для неизвестной напряженности магнитного поля $H_y(r, \varphi, t)$, а радиальная и угловая компоненты электрического поля E_g и E_j определяются из системы уравнений (1).

Найдем функцию Грина данной задачи. Для этого введем преобразование Фурье по пространственной координате и времени в следующем виде:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\xi x}d\xi, \quad f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\xi x}dx, \quad (3)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad \varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)e^{i\omega t}dt. \quad (4)$$

Тогда, в соответствии с введенными выше преобразованиями, решение волнового уравнения (2) можно записать в виде интеграла Фурье по трем координатам – x, z и времени t:

$$H_y(x,z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi,\eta,\omega)e^{i\xi x + i\eta z - i\omega t}d\xi d\eta d\omega,$$

или

$$H_y(r,\varphi,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} A(r',\theta,\omega)e^{irr'\cos(\theta-\varphi) - i\omega t}r'dr'd\theta d\omega, \quad (5)$$

где $A(r',\theta,\omega)$ определяет спектральную плотность магнитной компоненты поля.

Получим соотношение для неизвестной функции $A(r',\theta,\omega)$, для этого подставим приведенную выше запись решения для магнитной компоненты поля (5) в волновое уравнение (2), в результате, переходя к декартовым координатам, получаем следующее выражение:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(-\xi^2 - \eta^2 + \mu_0\varepsilon_0\mu\varepsilon\omega^2\right) A(\xi,\eta,\omega) e^{i\xi u + i\eta v - i\omega t} d\xi d\eta d\omega = \\ = \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial j^m}{\partial t}. \quad (6)$$

Видно, что заданная функция распределения стороннего тока представляется также в виде разложения в тройной интеграл Фурье. Таким образом, оказывается, что производная по времени спектральной плотности разложения стороннего тока отличается от спектральной плотности искомой функции лишь множителем $\dfrac{-\xi^2 - \eta^2 + \mu_0\varepsilon_0\mu\varepsilon\omega^2}{\varepsilon_0\varepsilon}$. Распределение известной плотности стороннего тока при этом должно подчиняться условиям разложимости в интеграл Фурье, что всегда имеет место в физических задачах [1].

Для определения спектральной плотности искомой функции домножим обе части выражения (6) на $e^{-i(\xi' x + \eta' z - \omega t)}$ и проинтегрируем в бесконечных пределах по x, z и t, и, воспользовавшись интегральным представлением $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x0)} dk = \delta(x - x_0)$, где $\delta(x - x_0)$ – дельта-функция Дирака, получим:

$$A(\xi,\eta,\omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_0\varepsilon \dfrac{\partial j^m}{\partial t'} e^{-i\xi x' - i\eta z' + i\omega t'}}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 - \xi^2 - \eta^2} dx' dz' dt'. \quad (7)$$

Выражение (7) определяет спектральную плотность $A(\xi,\eta,\omega)$ в искомом разложении (5). Эта спектральная плотность зависит от распределения стороннего тока в пространстве, причем в (7) интеграл берется только по тем точкам в пространстве, где имеются токи.

С учетом полученного выше выражения решение для магнитной составляющей поля будет иметь следующий вид:

$$H_y(x,z,t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} .. \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial j^m}{\partial t'} \frac{e^{i\xi(x-x') + i\eta(z-z') - i\omega(t-t')}}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 - \xi^2 - \eta^2} dx' dz' dt' d\xi d\eta d\omega \cdot (8)$$

Формулу (8) можно переписать, используя представление для функции Грина, в виде:

$$H_y(x,z,t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial j^m}{\partial t'} G(x,z,t,x',z',t') dx' dz' dt', \quad (9)$$

где $G(x,z,t,x',z',t')$ – функция Грина полученного решения:

$$G(x,z,t,x',z',t') = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(x-x') + i\eta(z-z') - i\omega(t-t')}}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta d\omega \cdot \quad (10)$$

В этом выражении x', z', t' – координаты источника и время начала импульса; x, z, t – координаты точки наблюдения и момент времени наблюдения. Функция Грина является функцией двух точек – точки источников поля и точки наблюдения, относительно этих двух точек она симметрична.

Таким образом, получено интегральное представление функции Грина для поля источника в свободном пространстве.

Перейдем к цилиндрическим координатам в соответствии с формулами $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ и, учитывая, что якобиан перехода равен ρ, получим:

$$G(r,\varphi,t,r',\varphi',t') = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\rho r\cos(\theta-\varphi) - \rho r'\cos(\theta-\varphi') - \omega(t-t'))}}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 - \rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta\, d\omega \cdot \quad (11)$$

Данное выражение можно упростить, воспользовавшись следующими известными формулами:

$$e^{i\rho r\cos(\theta-\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in(\theta-\varphi)} J_n(\rho r),$$

где $J_n(\rho r)$ – цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода порядка n;

$$e^{-i\rho r'\cos(\theta-\varphi')} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-im(\theta-\varphi)} J_m(\rho r'),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \delta_{mn},$$

где δ_{mn} – символ Кронекера;

$$J_n(\rho r) = \frac{1}{2}\left[H_n^{(2)}(\rho r) - (-1)^n H_n^{(2)}(-\rho r)\right],$$

где $H_n^{(2)}(\rho r)$ – функция Ханкеля 2-го рода n-го порядка.

В итоге, подставляя соответствующие разложения для экспонент, учитывая поведение функции Бесселя и проинтегрировав по координате q, можно получить:

$$G(r,\varphi,t,r',\varphi',t') = \\ = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho e^{-i\omega(t-t')}}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 - \rho^2} \begin{cases} H_n^{(2)}(\rho r') J_n(\rho r) d\rho\, d\omega, r < r' \\ H_n^{(2)}(\rho r) J_n(\rho r') d\rho\, d\omega, r > r' \end{cases} \quad (12)$$

Запишем выражение для компонент электромагнитного поля следующим образом:

$$E_{(r,\varphi)}(r,\varphi,t)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n(r,\varphi)}(\varphi,\omega,\rho)\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases}$$

$$H_y(r,\varphi,t)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases},$$

где

$$g_n^m(\varphi,\omega,\rho)=$$
$$=\frac{i}{8\pi}e^{-in(\varphi-\varphi')}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j^m}{\partial t'}\frac{\rho}{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega^2-\rho^2}e^{i\omega t'}\begin{cases} H_n^{(2)}(\rho r')r'dr'd\varphi'dt', r<r' \\ J_n(\rho r')r'dr'd\varphi'dt', r>r' \end{cases}.$$

Воспользуемся первыми двумя уравнениями Максвелла системы (1) и получим следующие соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\frac{in}{r} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases}=$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}(-i\omega\varepsilon\varepsilon_0) g^e_{nr}(\varphi,\omega,\rho)\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases},$$

откуда $g^e_{nr}(\varphi,\omega,\rho)=-\dfrac{nZ_0}{k_0\varepsilon r}g^m_n(\varphi,\omega,\rho)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases}=$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}(-i\omega\varepsilon\varepsilon_0) g^e_{n\varphi}(\varphi,\omega,\rho)\begin{cases} J_n(\rho r)d\rho d\omega, r<r' \\ H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega, r>r' \end{cases},$$

в результате получим

$$g^e_{n\varphi}(\varphi,\omega,\rho)=\frac{i\rho Z_0}{k_0\varepsilon}\begin{cases} J_n'(\rho r)/J_n(\rho r), r<r' \\ H_n^{(2)}{}'(\rho r)/H_n^{(2)}(\rho r), r>r' \end{cases}\cdot g^m_n(\varphi,\omega,\rho).$$

Поскольку электродинамические и геометрические параметры цилиндра не зависят от координаты y, решение задачи будем искать в предположении, что рассеянное поле имеет такую же зависимость от координат, что и падающее поле, и отличается лишь подынтегральным множителем в виде неизвестной функции $A_n(\varphi,\omega,\rho)$ [2].

Запишем импедансные граничные условия на поверхности цилиндра: $E_\varphi - ZZ_0H_y = 0\big|_{r=a}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\frac{i\rho Z_0}{k_0\varepsilon}\left(J_n'(\rho a)+A_n(\varphi,\omega,\rho)H_n^{(2)}{}'(\rho a)\right)d\rho d\omega -$$
$$ZZ_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\left(J_n(\rho a)+A_n(\varphi,\omega,\rho)H_n^{(2)}(\rho a)\right)d\rho d\omega=0,$$

где $A_n(\varphi,\omega,\rho)=-\dfrac{\dfrac{i\rho}{k_0\varepsilon}J_n'(\rho a)-ZJ_n(\rho a)}{\dfrac{i\rho}{k_0\varepsilon}H_n^{(2)}{}'(\rho a)-ZH_n^{(2)}(\rho a)}.$

Для дальней зоны могут быть сделаны следующие оценки полей:

$$H_y(r,\varphi,t)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\left[1-\frac{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}J_n'(\rho a)-ZJ_n(\rho a)}{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}H_n^{(2)}{}'(\rho a)-ZH_n^{(2)}(\rho a)}\right]H_n^{(2)}(\rho r)d\rho d\omega;$$

$$E_\varphi(r,\varphi,t)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\frac{i\rho Z_0}{k_0\varepsilon}\left[1-\frac{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}J_n'(\rho a)-ZJ_n(\rho a)}{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}H_n^{(2)}{}'(\rho a)-ZH_n^{(2)}(\rho a)}\right]H_n^{(2)}{}'(\rho r)d\rho d\omega;$$

$$E_r(r,\varphi,t)=$$
$$=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g^m_{n}(\varphi,\omega,\rho)\frac{nZ_0}{k_0\varepsilon r}\left[1-\frac{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}J_n'(\rho a)-ZJ_n(\rho a)}{\frac{i\rho}{k_0\varepsilon}H_n^{(2)}{}'(\rho a)-ZH_n^{(2)}(\rho a)}\right]H_n^{(2)}{}'(\rho r)d\rho d\omega.$$

Таким образом, получено выражение для функции Грина данной задачи, определены в интегральном представлении компоненты поля, приведены оценки полей в дальней зоне. Данные выражения далее могут быть рассчитаны численными методами.

Литература

1. Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. М.; Л., 2000.
2. Габриэльян Д.Д. Возбуждение импедансной поверхности цилиндра продольным электрическим диполем / Д.Д. Габриэльян, М.Ю. Звездина, П.И. Костенко // Журнал радиоэлектроники. 2000. №6.