

УДК 621.371

С.А. Комаров, Ю.А. Баранчугов, П.М. Зацепин
Возбуждение плоского импедансного волновода

Введение. Задачи распространения электромагнитных волн в регулярных волноводах поперечных сечений, допускающих применение метода разделения переменных с идеально проводящими стенками, хорошо изучены и имеют аналитическое решение [1]. Вопросы изучения структуры поля в регулярных и нерегулярных направляющих системах с импедансными граничными условиями актуальны в настоящее время и активно разрабатываются (см., например: [2]). Цель данной работы – развитие численно-аналитического подхода для изучения собственных значений и собственных функций импедансного плоского волновода и анализ их поведения в широком интервале значений импеданса.

Поле в волноводе. Геометрия задачи изображена на рисунке 1. Плоский волновод шириной $2a$ в декартовых координатах расположен в свободном пространстве таким образом, что его стенки совпадают с плоскостями $x = \pm a$. Стенки волновода характеризуются сторонним поверхностным импедансом Z , нормированным на импеданс свободного пространства $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Электромагнитное поле предполагается стационарным и гармоническим с круговой частотой ω и зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$. Задача полагается двумерной, так что $\partial/\partial y = 0$, и рассматривается случай распространения ТМ-волн вдоль оси Z с компонентами $\{H_y, E_x, E_z\}$.

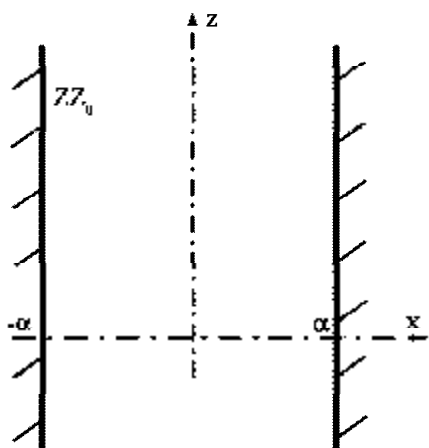


Рис. 1. Геометрия задачи

Требуется найти собственные типы волн данного волновода в случае выполнения на его стен-

ках импедансных граничных условий Шукина-Леонтовича:

$$\vec{E}_t(x, z) + ZZ_0[\vec{n}\vec{H}_t(x, z)] = 0 \Big|_s, \quad (1)$$

где $\vec{E}_t(x, z), \vec{H}_t(x, z)$ – касательные к поверхности границ составляющие полей; \vec{n} – единичная внутренняя нормаль к данной поверхности.

Решение задачи должно удовлетворять уравнениям Максвелла в свободном пространстве, причем решение удобно находить относительно компоненты H_y .

Рассмотрение далее проводится в безразмерных координатах $u = x/a, v = z/a$, величина $\delta = d/a$ и безразмерное волновое число $k'_o = k_o = \omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o} \cdot a$. Компоненты электрического поля выражаются при этом через магнитную скалярную составляющую, как

$$E_x = \frac{Z_o}{ik_o} \frac{\partial H_y}{\partial v}, \quad E_z = -\frac{Z_o}{ik_o} \frac{\partial H_y}{\partial u}. \quad (2)$$

Согласно работе [3] запишем поле в волноводе в виде дискретной суммы с коэффициентами разложения C_n :

$$H_y(u, v) = \frac{k_o}{Z_o} \sum_n C_n \cos(\gamma_n v) \Psi_n(u), \quad (3a)$$

$$E_x(u, v) = i \sum_n C_n \gamma_n \sin(\gamma_n v) \Psi_n(u), \quad (3b)$$

где $\gamma_n = \sqrt{k_o^2 - \alpha_n^2}$ – продольные волновые числа плоского волновода; α_n – поперечные волновые числа плоского волновода; $\Psi_n(u)$ – ортонормированные поперечные функции ТМ-волн.

Для постановки с идеально проводящим волноводом справедливо нулевое граничное условие:

$$E_x(x, z) \Big|_{x=\pm a} = E_x(u, v) \Big|_{u=\pm 1} = 0. \quad (4)$$

В данном случае необходимо решить задачу на нахождение собственных функций $\Psi_n(u)$ и собственных значений α_n .

Собственные функции импедансного волновода. Собственные функции для ТМ-волн можно разделить на четные и нечетные [3]:

$$\Psi_n(u) = \begin{cases} A_n \cos \alpha_n u, & \text{для четных мод,} \\ A_n \sin \alpha_n u, & \text{для нечетных мод.} \end{cases} \quad (5)$$

Множество $\alpha = \{\alpha_n\}$ образует бесконечный дискретный спектр собственных значений волновода, причем для идеального волновода [1]:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2}, \quad A_n = [1 + \delta_{0n}]^{-1/2}. \quad (6)$$

Коэффициенты A_n находятся из условия ортонормировки собственных функций:

$$\int_{-1}^{+1} \Psi_n(u) \Psi_m(u) du = \delta_{nm}. \quad (7)$$

В данной работе рассмотрено изучение волновода с импедансными стенками. Из условия (7) выражаются коэффициенты собственных функций A_n для импедансного волновода:

$$A_{2n} = \left[1 + \frac{\sin 2\alpha_{2n} a}{2\alpha_{2n} a} \right]^{-1/2}, \quad A_{2n+1} = \left[1 - \frac{\sin 2\alpha_{2n+1}}{2\alpha_{2n+1}} \right]^{-1/2}.$$

Поперечные волновые числа импедансного волновода. Собственные функции удовлетворяют импедансному граничному условию, получаемого из (1):

$$\Psi'_n(u) \mp ik_o Z \Psi_n(u) = 0 \Big|_{u=\pm 1} \quad (8)$$

Из этого условия получаются трансцендентные уравнения, которые определяют собственные значения импедансного плоского волновода: $\alpha_{2n} \sin \alpha_{2n} + ik_o Z \cos \alpha_{2n} = 0$, для четных мод; (9а)

$$\alpha_{2n+1} \cos \alpha_{2n+1} - ik_o Z \sin \alpha_{2n+1} = 0, \quad \text{для нечетных мод.} \quad (9б)$$

Дисперсионные уравнения (9) решаются численно в комплексной области. Наиболее быструю сходимость из известных итерационных методов, пригодных для комплексных корней, дает метод Ньютона. Если задано некоторое трансцендентное уравнение $F(x) = 0$, то схема решения записывается как:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

В нашем случае получаемые трансцендентные уравнения, имеют вид:

$$F_1(x) = x \sin x + ik_o Z \cos x = 0, \quad \text{для четных мод;} \quad (11а)$$

$$F_2(x) = x \cos x - ik_o Z \sin x = 0, \quad \text{для нечетных мод,} \quad (11б)$$

где $x = \alpha_n$ – искомые значения.

Тогда запишем схему решения итерационного процесса для четных мод:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} \sin x^{(k)} + ik_o Z \cos x^{(k)}}{(1 - ik_o Z) \sin x^{(k)} + x^{(k)} \cos x^{(k)}}. \quad (12а)$$

Для нечетных мод получаем:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} \cos x^{(k)} - iD \sin x^{(k)}}{(1 - iD) \cos x^{(k)} - x^{(k)} \sin x^{(k)}}. \quad (12б)$$

По построенной схеме итерационного процесса были получены численные результаты, которые приведены ниже.

Анализ результатов. Для расчета поперечных волновых чисел при произвольных значениях мнимой части импеданса стенок волновода $|\text{Im}(Z)|$ в качестве начальных приближений используются решения, полученные при меньшем значении $|\text{Im}(Z)|$. Таким образом, в качестве нулевого приближения берется α_n^o , и затем последовательно рассчитываются $\{\alpha_n\}$ с увеличением $|\text{Im}(Z)|$ до необходимого значения. Результаты численного расчета показаны на рисунке 2.

Как видно на графиках (рис. 2), при идеально проводящих стенках волновода распределение $\{\alpha_n\}$ соответствует классическому решению (6). При введении мнимого импеданса периодичность ряда $\{\alpha_n\}$ нарушается и распределение искажается.

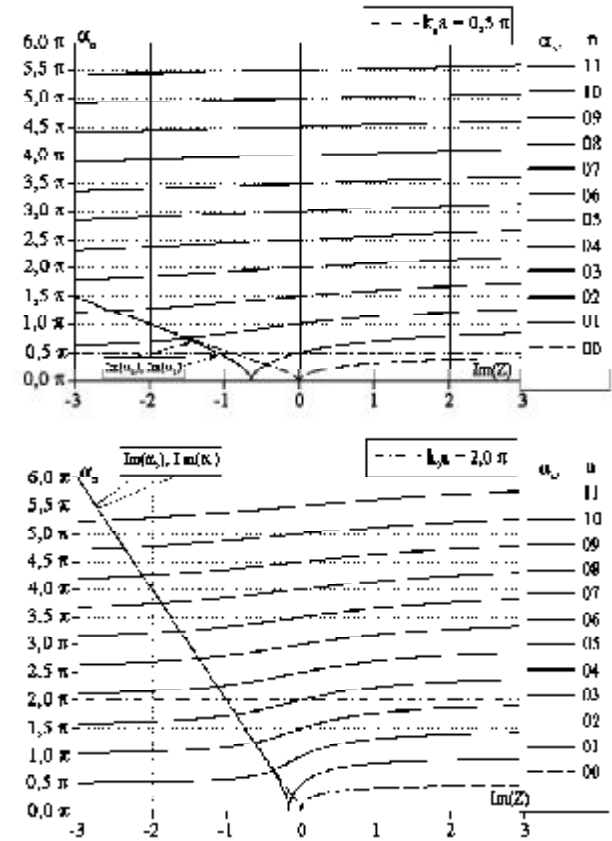


Рис. 2. Графики зависимости поперечных волновых чисел для различных мод ТМ-волн плоского импедансного волновода: при $k_0 a = 0,5\pi$ – слева; при $k_0 a = 2,0\pi$ – справа

При емкостном импедансе ($\text{Im}(z) > 0$) значения волновых чисел $\{\alpha_n\}$ увеличиваются и стремятся к значениям $\{\alpha_{n+1}^o\}$. При индуктивном импедансе ($\text{Im}(z) < 0$) видим противоположную картину: с ростом $|\text{Im}(Z)|$ значения волновых чисел старших мод уменьшаются и стремятся

к $\{\alpha_{n-1}\}$. Причем для двух первых мод волновые числа (α_0, α_1) принимают чисто мнимые значения, при пересечении $|\text{Im}(Z)|$ некоторых критических точек, в которых данные волновые числа принимают нулевые значения. Для α_0 критическая точка $-\text{Im}(z) = 0$. Для α_1 критическая точка находится в области отрицательных значений $\text{Im}(z)$, причем с увеличением $k_0 a$ она смещается в сторону нуля. С ростом величины $k_0 a$, которое пропорционально ширине волновода, значения $\{\alpha_n\}$ стремятся к пределу быстрее, что более заметно на следующих графиках.

На рисунке 3 представлены результаты исследования зависимости волновых чисел младших и старших волноводных мод от значения импеданса при различных ширинах волновода.

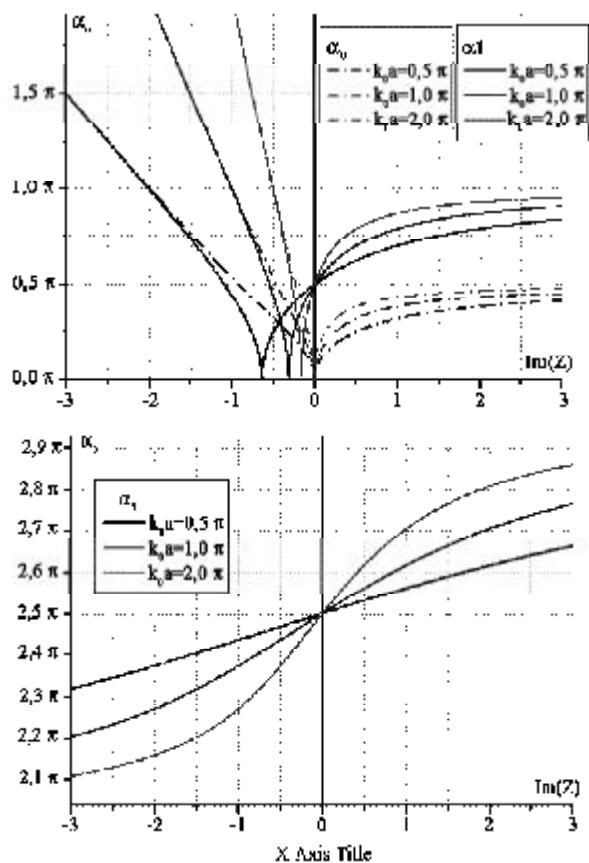


Рис. 3. Графики зависимости поперечных волновых чисел при различной ширине волновода: α_0 и α_1 – слева; α_5 – справа

Наличие стороннего импеданса стенок волновода приводит к нарушению нулевого граничного условия (4) и к изменению значений поперечных волновых чисел, и как следствие, к перераспределению волноводных мод в волноводе. Для больших значений индуктивного импеданса происходит вырождение первых двух волноводных мод в поверхностные волны, которые распрост-

раняются вдоль стенок волновода, что видно на серии графиков (рис. 4–6).

На рисунке 4 видно, что при наличии поверхностного импеданса на стенках волновода на них не выполняется нулевое граничное условие, и распределение волноводных мод искажается. При этом сохраняется четность и нечетность собственных функций.

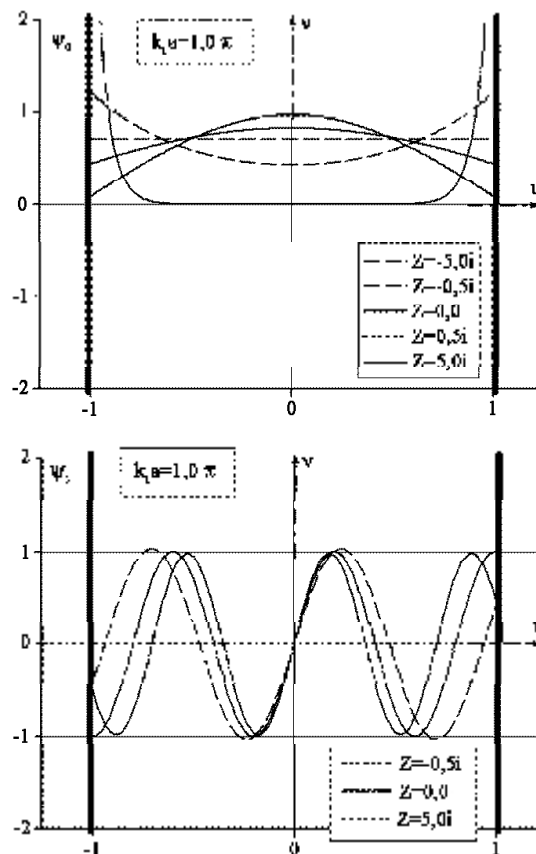


Рис. 4. Графики распределения волноводных мод в плоском волноводе при различных значениях мнимого поверхностного импеданса стенок волновода: ψ_0 – слева; ψ_5 – справа

На рисунке 5 представлены графики распределения волноводных мод в плоском волноводе при индуктивном импедансе $\text{Im}(Z) = -0,5i$ для различных значений относительной ширины $k_0 a$.

Заключение. Таким образом, были рассчитаны поперечные волновые числа поля плоского импедансного волновода. Для решения трансцендентных уравнений, определяющих волновые числа, был применен численный метод Ньютона и построена соответствующая итерационная схема расчета. Используемый последовательный способ получения начального приближения позволяет находить поперечные волновые числа $\{\alpha_n\}$ плоского импедансного волновода в произвольной области значений поверхностного импеданса стенок плоского волновода. Численный

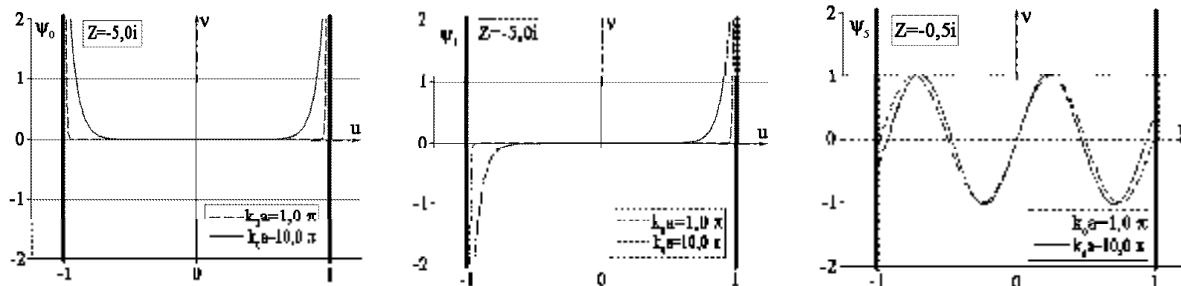


Рис. 5. Графики распределения волноводных мод в плоском волноводе при индуктивном импедансе $Im(Z) = -0,5i$ для различных значений относительной ширины $k_0\alpha$: ψ_0 - слева; ψ_1 - по центру; ψ_5 - справа

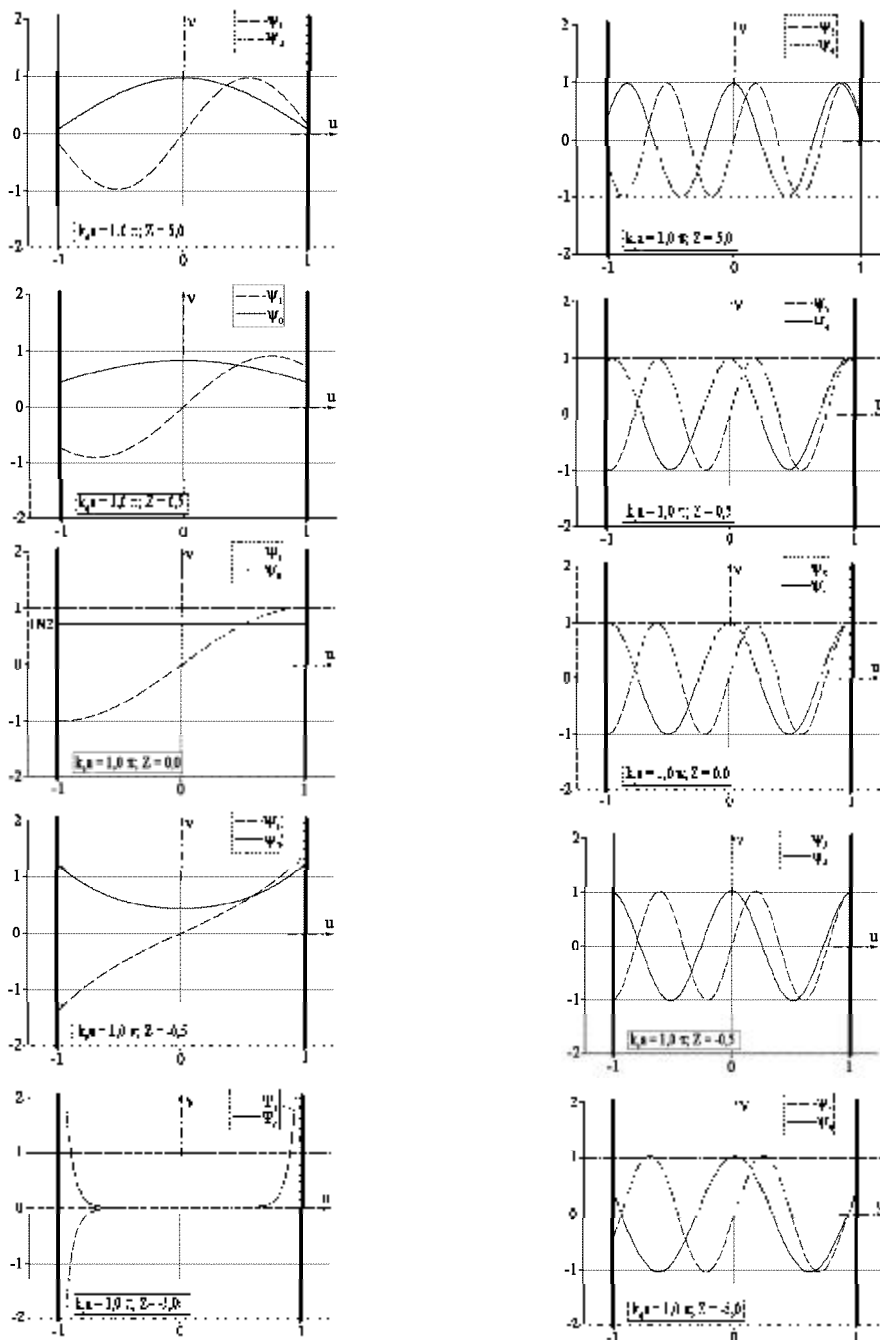


Рис. 6. Графики распределения различных волноводных мод в плоском волноводе при различных значениях мнимого поверхностного импеданса стенок волновода

анализ полученных результатов подтверждает их достоверность.

Для нахождения полного поля в волноводе требуется найти коэффициенты разложения

полей C_n , которые зависят от граничных условий задачи. В данной работе были найдены собственные типы волн плоского импедансного волновода.

Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. 3-е изд., перераб. и доп. М., 1989.

2. Комаров С.А. Дифракция электромагнитной вол-

ны на щели в импедансном экране на границе раздела / С.А. Комаров, П.М. Зацепин, А.И. Машутин // РЭ. 1999. Т. 44. №2.

Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. М.; Л., 1999.