УДК 519.862.8

А.В. Жариков, А.В. Максимов

О решении частной задачи управления в случае разной информированности субъектов

В данной статье рассматривается задача управления в случае несовпадающей информированности субъектов управления. Актуальность обусловлена развитием экономических систем в условиях конкуренции и сотрудничества, при этом информационные возможности каждого субъекта системы являются различными.

Рассматривается оператор управления состояниями субъекта, который функционирует в динамической случайной среде. Управление проводится с использованием принципа осреднения входных переменных [2]. Предполагается, что управление выбирается из условий максимизации некоторого критерия.

Пусть $x = (x_1, x_2,...,x_n)$ – случайный вектор с функцией распределения $\Phi = \Phi(x_1,...,x_n)$, а множество $I = \{1,2,...,n\}$ – индексы всех компонент вектора x; множество I_iНI – совокупность индексов, определяющих информационную структуру i-й управляющей переменной, i=1,2,...,n. Введем также вектор управления $V=(v_1,v_2,...,v_n)$, где $v_i=v_i(d_i)$, $d_i=(x_j)_{jOI}$, i=1,2,...,n. Таким образом, задача примет вид:

$$J_k = M[F_k(x,V(d_i))] \to \max_{v\in V}, k = 1,2,...,n, \qquad (1)$$

где символ $M[\cdot]$ означает операцию вычисления математического ожидания, а m – количество объектов управления. Формализация условий разной неинформированности приводит к равенству нулю частной производной по соответствующей переменной [3]:

$$\frac{\partial V_i(d_i)}{\partial x_j} = 0. \qquad (2)$$

Специфика данной задачи позволяет свести ее к задаче теории игр и рассматривать концепцию решения, существующую в рамках данной теории. Причем количество игроков соответствует количеству управляемых объектов.

На сегодня данная задача не имеет общего решения, и в основном решение зависит от конкретного вида функционала $F_k(x,V)$ и структуры информационного потока. Тем не менее в некоторых случаях решение можно найти аналитически.

Рассмотрим задачу (1) при $n=m=2$. Тогда задача примет вид:

$$\begin{cases} M[F_1(x,y,u(y),v(x))] \to \max, \\ M[F_2(x,y,u(y),v(x))] \to \max, \end{cases} \qquad (3)$$

при условиях $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$ (4)

Упростим задачу, взяв конкретный вид $F_1 = \langle A(u,v,x,y),(u,v,x,y)\rangle$, $F_2 = \langle B(u,v,x,y),(u,v,x,y)\rangle$, где $A = A^T = (a_{ij})_{4\times4}$, $B = B^T = (b_{ij})_{4\times4}$, , т.е. F_1, F_2 – квадратичные формы с переменными u,v,x,y. Пусть информационный вектор (x,y) распределен на квадрате $[a,b]\times[a,b](a \ge 0, b > 0)$ с плотностью $\Phi(x,y)$. Тогда (3) примет вид

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_a^b\int_a^b (a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}ux + ... + a_{44}y^2)\Phi(x,y)dxdy \to \max_{u\in U}, \\ J_2 &= \int_a^b\int_a^b (b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}ux + ... + b_{44}y^2)\Phi(x,y)dxdy \to \max_{v\in V} \end{aligned} \qquad (5)$$

Задача (3) при условиях (4) по сути является игрой двух лиц, где $J_1(u,v)$, $J_2(u,v)$ – функции выигрыша, а u, v – стратегии игроков. Множеством допустимых стратегий U, V будет произведение пространств $C^1([a,b]\times[a,b])\times C^1([a,b]\times[a,b])$. Нахождение решения игры зависит от понимания рациональности и оптимальности поведения игроков.

Одна из распространенных концепций решения некооперативных игр – *ситуация равновесия по Нэшу* [5], суть которой заключается в невозможности увеличения выигрыша игрока при его отклонении от данного равновесия. В статье автор показывает, что функции поведения игроков u, v находятся аналитически, когда x и y независимы.

Утверждение 1. Пусть компоненты случайного вектора x и y есть независимые случайные величины, т.е.

$$\Phi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y). \qquad (6)$$

Тогда равновесие по Нэшу задачи (5) при условиях (4) и $a_{11}, b_{22} \le 0$ достигается на линейных по своим переменным функциях $u^*(y)$ и $v^*(x)$, где a_{11} и b_{22} – элементы матриц A и B соответственно.

Доказательство. Ситуация равновесия по Нэшу влечет за собой выполнение следующих условий

$$J_1(u, v^*) \le J_1(u^*, v^*),$$

$$J_2(u^*, v) \le J_2(u^*, v^*).$$

В результате получаем вариационную задачу отыскания максимума функционалов J_1, J_2 по переменным u и v соответственно. Ввиду громоздкости вычислений и преобразований приведем лишь основные этапы решения согласно [1].

1. Выпишем функции Лагранжа L_1, L_2:

$$L_1\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, P_1, x, y\right) =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \lambda_0^1\left(\left\langle A(u,v,x,y),(u,v,x,y)\right\rangle \Phi(x,y)\right) + P_1\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right) dxdy,$$

$$L_2\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, P_2, x, y\right) =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \lambda_0^2\left(\left\langle B(u,v,x,y),(u,v,x,y)\right\rangle \Phi(x,y)\right) + P_2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy,$$

где (λ_0^1, P_1), (λ_0^2, P_2) – множители Лагранжа.

Для удобства можно положить λ_0^1 и λ_0^2 равными единицы.

2. Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial x} = \lambda_0^1 \dfrac{\partial\left(\left\langle A(u,v,x,y),(u,v,x,y)\right\rangle \Phi(x,y)\right)}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial y} = \lambda_0^2 \dfrac{\partial\left(\left\langle B(u,v,x,y),(u,v,x,y)\right\rangle \Phi(x,y)\right)}{\partial v}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1\Big|_{x\in[a,b]} = 0 = 2\int_a^b (a_{11}u + a_{22}v + a_{13}x + a_{14}y)\Phi(x,y)dx, \\ P_2\Big|_{y\in[a,b]} = 0 = 2\int_a^b (b_{11}u + b_{22}v + b_{13}x + b_{14}y)\Phi(x,y)dy, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}u\int_a^b \varphi_1(x)dx + a_{12}\int_a^b v\varphi_1(x)dx + a_{13}\int_a^b v\varphi_1(x)dx + a_{14}y\int_a^b v\varphi_1(x)dx = 0, \\ b_{22}v\int_a^b \varphi_2(y)dy + b_{12}\int_a^b u\varphi_2(y)dy + b_{23}x\int_a^b \varphi_2(y)dy + b_{24}\int_a^b y\varphi_2(y)dy = 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. Нахождение допустимых экстремалей u и v. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\int_a^b \varphi_1(x)dx = A_1^{'}, \quad \int_a^b x\varphi_1(x)dx = A_2^{'}, \text{ при } a_{11} \ne 0,$$

$$A_1 = \frac{a_{12}}{a_{11}A_1^{'}}, \quad A_2 = \frac{a_{13}A_2^{'}}{a_{11}A_1^{'}}, \quad A_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}} \text{ и } \int_a^b \varphi_2(y)dy = B_1^{'},$$

$$\int_a^b y\varphi_2(y)dy = B_2^{'}, \text{ при } b_{22} \ne 0 \quad B_1 = \frac{b_{12}}{b_{22}B_1^{'}},$$

$$B_2 = \frac{b_{24}B_2^{'}}{b_{22}B_1^{'}}, \quad B_3 = \frac{b_{23}}{b_{22}}.$$

Рассмотрим случаи:

а) $a_{11} \ne 0$, $b_{22} \ne 0$. Тогда система интегральных уравнений (8) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}A_1^{'}u + a_{12}\int_a^b v\varphi_1(x)dx + a_{13}A_2^{'} + a_{14}yA_1^{'} = 0, \\ b_{22}B_1^{'}v + b_{12}\int_a^b u\varphi_2(y)dy + b_{23}xB_1^{'} + b_{24}B_2^{'} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + A_1\int_a^b v\varphi_1(x)dx + A_2 + A_3 y = 0, \\ v + B_1\int_a^b u\varphi_2(y)dy + B_2 + B_3 x = 0. \end{cases}$$

Теперь выразив, например, $u = -\left(A_1\int_a^b v\varphi_1(x)dx + A_2 + A_3 y\right)$ и подставив во второе равенство, получим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$v - A_1B_1 \cdot B_1^{'}\int_a^b v\varphi_1(x)dx - A_2B_2 \cdot B_1^{'} - A_3B_1 \cdot B_1^{'} -$$

$$- A_3B_1 \cdot B_2^{'} + B_2 + +B_3 x = 0.$$

Согласно теории решения такого рода уравнений [6], единственность решения будет достигаться при выполнении условия

$$A_1\frac{b_{12}}{b_{22}}A_1^{'} \ne 1 \Leftrightarrow \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{22}} \ne 1,$$

а само решение имеет вид

$$v^* = -B_3 x + \left(\frac{b_{23}A_2^{'}A_1b_{12}}{b_{22}^2} + \frac{b_{24}B_2^{'}}{b_{22}B_1^{'}} - \frac{A_3b_{12}B_2^{'}}{b_{22}B_1^{'}} - \frac{A_2b_{12}}{b_{22}}\right) \Big/$$

$$\Big/ \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{22}} - 1\right).$$

Аналогично получаем формулу и для u:

$$u^* = A_3 y + \left(\frac{a_{14}B_2^1 \cdot B_1a_{12}}{a_{11}^2} + \frac{a_{13}A_2^1}{a_{11}A_1^1} - \frac{B_3a_{12}A_2^1}{a_{11}A_1^1} - \frac{B_2a_{12}}{a_{11}}\right) \Big/$$

$$\Big/ \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{22}} - 1\right);$$

b) при $b_{22}=0$, $a_{11}\neq 0$; $b_{22}\neq 0$, $a_{11}=0$ и $b_{22}=0$, $a_{11}=0$, u и v имеют вид $u^*=-\dfrac{b_{24}y}{a_{12}}$, $v^*=-\dfrac{a_{13}x}{a_{12}}$. соответственно.

Таким образом, мы показали, что функции u и v имеют линейный характер.

4. Покажем, что найденные u и v являются точкой равновесия по Нэшу. Для этого рассмотрим разность для функционала J_1:

$$J_1(u^*+h_1,v^*)-J_1(u^*,v^*)=$$
$$=\int_a^b\int_a^b\left(a_{11}h_1^2+\left(2a_{11}u^*+2a_{12}v^*+a_{13}x+a_{14}y\right)h_1\right)\Phi(x,y)dxdy,$$

где $h_1\in C([a,b]\times[a,b])$.

Учитывая (7), имеем

$$J_1(u^*+h_1,v^*)-J_1(u^*,v^*)=$$
$$\int_a^b\int_a^b a_{11}h_1^2\Phi(x,y)dxdy.$$

Аналогично, рассматривая приращение функционала J_2, получаем

$$J_2(u^*,v^*+h_2)-J_2(u^*,v^*)=$$
$$\int_a^b\int_a^b b_{22}h_2^2\Phi(x,y)dxdy,$$

где $h_2\in C([a,b]\times[a,b])$. Таким образом, для того чтобы пара u^* и v^* являлась точкой равновесия по Нэшу, необходимо и достаточно потребовать неположительности коэффициентов a_{11} и b_{22}, т.е. $a_{11},b_{22}\le 0$. Утверждение доказано.

Наряду со случаем независимых x и y можно рассматривать и общий случай. Необходимые условия (6) при этом не изменятся. Тогда нахождение u^* и v^* будет зависеть от разрешимости системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u\int_a^b\Phi(x,y)dx+a_{12}\int_a^b v(x)\Phi(x,y)dx+ \\ a_{13}\int_a^b x\Phi(x,y)dx+a_{14}y\int_a^b\Phi(x,y)dx=0, \\ b_{22}v\int_a^b\Phi(x,y)dy+b_{12}\int_a^b u(y)\Phi(x,y)dy+ \\ +b_{23}x\int_a^b\Phi(x,y)dy+b_{24}\int_a^b y\Phi(x,y)dy=0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение данной системы находится уже с использованием итерационных и численных методов. К ним относятся, например, метод последовательных приближений или метод квадратур [6]. Недостатком данных методов является то, что они применимы лишь для узкого класса задач.

Задачу (3) можно решить и в концепции *оптимальности по Парето* [4]. Ее суть заключается в увеличении выигрыша каждого из игроков за счет сотрудничества друг с другом. В нашем случае критерий выполнения Парето оптимальности можно интерпретировать неравенствами:

$$J_1(u,v)\le J_1(u^*,v^*),$$
$$J_2(u,v)\le J_2(u^*,v^*).$$

Сформулируем утверждение в предположении, что игроки заинтересованы в увеличении суммарного (общего) выигрыша.

Утверждение 2. Пусть компоненты случайного вектора x и y есть независимые случайные величины, т.е. выполняется (6). Тогда оптимальность решения по Парето при условии увеличения суммарного выигрыша задачи (5) при условиях (4), и $c_{11},c_{22}\le 0$ обеспечивается на линейных по своим переменным функциях $u^*(y)$ и $v^*(x)$, где c_{11} и c_{22} элементы матриц $C=C^T=A+B$.

Доказательство. Проводится аналогично утверждению 1. С учетом поправок на системы интегральных уравнений систему (8) можно рассматривать в следующем виде:

$$\begin{cases} c_{11}u\int_a^b\varphi(x)dx+c_{12}\int_a^b v\varphi_1(x)dx+ \\ +c_{13}\int_a^b x\varphi_1(x)dx+c_{14}y\int_a^b\varphi_1(x)dx=0, \\ c_{22}v\int_a^b\varphi_2(y)dy+c_{12}\int_a^b u\varphi_2(y)dy+ \\ +c_{23}x\int_a^b\varphi_2(y)dy+c_{24}\int_a^b y\varphi_2(y)dy=0. \end{cases}$$

Случай с независимыми случайными величинами x и y так же, как и в равновесии по Нэшу, не тривиален и заключается в решении системы

$$\begin{cases} c_{11}u\int_a^b\Phi(x,y)dx+c_{12}\int_a^b v(x)\Phi(x,y)dx+ \\ +c_{13}\int_a^b x\Phi(x,y)dx+c_{14}y\int_a^b\Phi(x,y)dx=0, \\ c_{22}v\int_a^b\Phi(x,y)dy+c_{12}\int_a^b u(y)\Phi(x,y)dy+ \\ +c_{23}x\int_a^b\Phi(x,y)dy+c_{24}\int_a^b y\Phi(x,y)dy=0. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, получили, что задача оптимального управления при несовпадающей информированности субъектов (3)–(4) может быть переформулирована в терминах теории игр. Получены решения частной задачи (5), (4) при условии (6) в концепциях равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Также найдены уравнения (9), (10) для нахождения $u^*(y)$ и $v^*(x)$ в случае зависимости случайных величин x и y.

Литература

1. Гельфанд И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. М., 1961.

2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., 1973.

3. Максимов А.В. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования / А.В. Максимов, Н.М. Оскорбин. Барнаул, 2005.

4. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971.

5. Петросян Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. М., 1998.

6. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. М., 2003.