ÓÄÊ 519.6

Ñ.Ñ. Êóçèêîâ, Ò.Â. Ïîïîâà

Ðàñ÷åò òå÷åíèé ñòðàòèôèöèðîâàííîé æèäêîñòè ñî ñâîáîäíîé ãðàíèöåé

Ñòðàòèôèöèðîâàííûå æèäêîñòè õàðàêòåðèçóþòñÿ òåì, ÷òî â ñòàòè÷åñêîì ñîñòîÿíèè èõ ôèçè÷åñêèå õàðàêòåðèñòèêè (ïëîòíîñòü, òåìïåðàòóðà è äð.) èçìåíÿþòñÿ òîëüêî âäîëü íåêîòîðîãî âûäåëåííîãî íàïðàâëåíèÿ. Íàèáîëåå ñóùåñòâåííîå âëèÿíèå íà äèíàìè÷åñêèå ñâîéñòâà æèäêîñòè îêàçûâàåò ïëîòíîñòíàÿ ñòðàòèôèêàöèÿ, âîçíèêàþùàÿ ïîä äåéñòâèåì ñèëû òÿæåñòè.

Â äàííîé ðàáîòå ðàññìàòðèâàåòñÿ òå÷åíèå ñòðàòèôèöèðîâàííîé æèäêîñòè â îãðàíè÷åííîé îáëàñòè ñî ñâîáîäíîé ãðàíèöåé. Äëÿ èññëåäîâàíèÿ õàðàêòåðà òå÷åíèÿ æèäêîñòè ñòðîèòñÿ ÷èñëåííàÿ ìîäåëü.

Ðàññìîòðèì äâóìåðíîå óñòàíîâèâøååñÿ òå÷åíèå íåñæèìàåìîé íåâÿçêîé æèäêîñòè â îãðàíè÷åííîé îáëàñòè $G=\{(x,y): 0\le x\le X;\ g(x)\le y\le f(x)\}$, ãäå $y=f(x)$ – ñâîáîäíàÿ ãðàíèöà, $y=g(x)$ – çàäàííàÿ ãðàíèöà. Êóñî÷íî-ãëàäêàÿ ãðàíèöà Ã ñîñòîèò èç ó÷àñòêîâ âòåêàíèÿ, âûòåêàíèÿ, íåïðîíèöàåìûõ ñòåíîê è ñâîáîäíîé ãðàíèöû.

Äëÿ îïèñàíèÿ òå÷åíèÿ íåâÿçêîé íåñæèìàåìîé æèäêîñòè èñïîëüçóåòñÿ ñèñòåìà óðàâíåíèé Íàâüå-Ñòîêñà â ïåðåìåííûõ «ôóíêöèÿ òîêà – âèõðü»:

$$\Delta\psi=-\omega, \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=0, \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \qquad (3)$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

ãäå ψ – ôóíêöèÿ òîêà; ρ – ïëîòíîñòü; ω – âèõðü; u,v – êîìïîíåíòû âåêòîðà ñêîðîñòè; Fr – ÷èñëî Ôðóäà.

Äëÿ îïðåäåëåíèÿ ñâîáîäíîé ãðàíèöû, çàäàííîé â âèäå F(x,y) = 0, èñïîëüçóåòñÿ óðàâíåíèå

$$u\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=0.$$

Â äàííîé ðàáîòå ñâîáîäíàÿ ãðàíèöà çàäàåòñÿ ÿâíî â âèäå y = f(x). Â ýòîì ñëó÷àå óðàâíåíèå äëÿ îïðåäåëåíèÿ ñâîáîäíîé ãðàíèöû ïðèìåò âèä:

$$u\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=v. \qquad (4)$$

Äëÿ çàäà÷è (1)–(4) ïîñòàâèì ñëåäóþùèå ãðàíè÷íûå óñëîâèÿ.

Íà ó÷àñòêå âòåêàíèÿ $\Gamma_2=\{(x,y): x=X;\ g(X)\le c\le y\le d\le f(X)\}$ çàäàäèì óñëîâèå äëÿ ψ, ρ, ω:

$\psi=\psi_1(y)$,

ãäå $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}>0$

è $0=\psi_1(a)\le\psi\le\psi_1(b)=1$;

$\rho=\rho_1(\psi)$ è $0=\rho_1\big|_{y=b}\le\rho\le\rho_1\big|_{y=a}=1$;

$\omega=0$.

Íà ó÷àñòêå âûòåêàíèÿ $\Gamma_2=\{(x,y): x=X;\ g(X)\le c\le y\le d\le f(X)\}$ ñ÷èòàåì èçâåñòíûì òîëüêî çíà÷åíèå ψ:

$\psi=\psi_2(y)$,

ãäå $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}>0$

è $0=\psi_2(c)\le\psi\le\psi_2(d)=1$.

Íà ñâîáîäíîé ãðàíèöå èñïîëüçóåì óñëîâèå íåïðîòåêàíèÿ:

$$\psi=1,\quad \rho=0.$$

Ñâîáîäíàÿ ãðàíèöà ÿâëÿåòñÿ ëèíèåé òîêà, ïîýòîìó çíà÷åíèå ôóíêöèè òîêà è ïëîòíîñòè íà íåé ñîõðàíÿþòñÿ. Âèõðü îïðåäåëÿåì ïî ôîðìóëå:

$$\omega=-\frac{\rho_\psi}{\mathrm{Fr}^2}\left(y-y_1(\psi)\right),$$

ãäå $y_1(\psi)$ íàõîäèòñÿ èç óñëîâèÿ äëÿ ψ íà ó÷àñòêå âòåêàíèÿ.

Íà íåïðîíèöàåìûõ òâåðäûõ ñòåíêàõ ñòàâÿòñÿ óñëîâèÿ íåïðîòåêàíèÿ.

Óñòàíîâèâøèéñÿ õàðàêòåð òå÷åíèÿ äàåò âîçìîæíîñòü îïðåäåëèòü çíà÷åíèå ôóíêöèé ρ è ω íà âñåé ãðàíèöå îáëàñòè äî íà÷àëà ðåøåíèÿ.

Äëÿ èññëåäîâàíèÿ õàðàêòåðà òå÷åíèÿ æèäêîñòè ñî ñâîáîäíîé ãðàíèöåé, êîòîðûå îïèñûâàþòñÿ ñèñòåìîé óðàâíåíèé (1)–(4) ñòðîèì ÷èñëåííóþ ìîäåëü.

Âîñïîëüçóåìñÿ ñåòî÷íûì ìåòîäîì, òàê êàê âñå íåèçâåñòíûå âåëè÷èíû îïðåäåëÿþòñÿ â îäíèõ è òåõ æå òî÷êàõ.

Ïîñòðîèì â îáëàñòè G ñåòêó ðàâíîìåðíóþ ïî x è íåðàâíîìåðíóþ ïî y:

$$S=\left\{(i\Delta x,\ j\Delta y_i): i=\overline{0,\mathrm{N}_x},\ j=\overline{0,\mathrm{N}_y}\right\},$$

ãäå N_x, N_y – ÷èñëî ðàçáèåíèé ïî x è y ñîîòâåòñòâåííî; $\Delta x=\dfrac{X}{\mathrm{N}_x}$, $\Delta y_i=\dfrac{f(x_i)-g(x_i)}{\mathrm{N}_y}$ – øàãè ïî íàïðàâëåíèþ x è y ñîîòâåòñòâåííî.

Óðàâíåíèå (1) äëÿ ôóíêöèè òîêà àïïðîêñèìèðóåì è ðåøàåì, èñïîëüçóÿ ñõåìó Äóãëàñà-Ðýêôîðäà ñ ïîñòîÿííûì èòåðàöèîííûì ïàðàìåòðîì τ_ψ, êîòîðàÿ âûáèðàåòñÿ àáñîëþòíî óñòîé÷èâîé [1]:

$$\frac{\psi_{ij}^{n+\frac{1}{2}}-\psi_{ij}^{n}}{\tau_\psi}=\Lambda_1\psi_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2\psi_{ij}^{n}+\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\psi_{ij}^{n+1}-\psi_{ij}^{n}}{\tau_\psi}=\Lambda_2(\psi_{ij}^{n+1}-\psi_{ij}^{n}).$$

Óðàâíåíèÿ (2) è (3) äëÿ ïëîòíîñòè è âèõðÿ ðåøàåì ñ ïîìîùüþ ìåòîäà ìèíèìàëüíûõ íåâÿçîê [2]:

$$\rho^{n+1}=\rho^{n}+\tau_\rho r^{n},$$

$$\omega^{n+1}=\omega^{n}+\tau_\omega R^{n},$$

ãäå r^n, R^n – íåâÿçêè ñõåìû äëÿ ïëîòíîñòè è âèõðÿ ñîîòâåòñòâåííî.

Ñâîáîäíóþ ãðàíèöó âû÷èñëÿåì ñ ïîìîùüþ ÿâíîé ñõåìû áåãóùåãî ñ÷åòà. Ýòà ñõåìà ÿâëÿåòñÿ óñëîâíî óñòîé÷èâîé è èìååò ïåðâûé ïîðÿäîê àïïðîêñèìàöèè ïî x [1]:

$$\frac{f_{ij}^{n+1}-f_{ij}^{n}}{t_f}+u_{ij}^{n}\frac{f_{ij}^{n}-f_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}=v_{ij}^{n},\ \text{ïðè}\ u_{ij}^{n}\ge 0;$$

$$\frac{f_{ij}^{n+1}-f_{ij}^{n}}{t_f}+u_{ij}^{n}\frac{f_{i+1,j}^{n}-f_{i,j}^{n}}{\Delta x}=v_{ij}^{n},\ \text{ïðè}\ u_{ij}^{n}<0.$$

Ïðîöåññ âû÷èñëåíèÿ ñõåìàòè÷íî ìîæíî èçîáðàçèòü òàê:

$$\omega^0\to f^0\to\quad \psi^1\to\rho^1\to\omega^1\to f^1\to\mathbf{K}$$

$$\to\omega^n\to f^n\to y^{n+1}\to r^{n+1}\to w^{n+1}\to f^{n+1}\to\mathbf{K}$$

Ýòîò ïðîöåññ ïðîäîëæàåòñÿ äî òåõ ïîð, ïîêà íîðìû íåâÿçîê íå ñòàíóò ìåíüøå íåêîòîðîé çàäàííîé âåëè÷èíû.

Çàìåòèì, ÷òî ñåòêà *S* çàäàåòñÿ îò ñâîáîäíîé ãðàíèöû è ïîñëå ïåðåñ÷åòà ôóíêöèè *y = f(x)* óçëû ñåòêè ìîãóò ñìåñòèòüñÿ. Äëÿ ïðîäîëæåíèÿ âû÷èñëåíèé íåîáõîäèìî ïåðåíåñòè çíà÷åíèÿ ôóíêöèé, íàõîäÿùèåñÿ â óçëàõ ñòàðîé ñåòêè *S*, â ñîîòâåòñòâóþùèå óçëû ïåðåñ÷èòàííîé ñåòêè *S*.

Ïðèâåäåííûé àëãîðèòì âû÷èñëåíèÿ ðåàëèçîâàí â ñðåäå MATLAB. Åãî òåñòèðîâàíèå ïðîâîäèëîñü íà ñëåäóþùèõ ïðèìåðàõ:

– òå÷åíèå æèäêîñòè â îãðàíè÷åííîé îáëàñòè ñ ôèêñèðîâàííûìè ãðàíèöàìè è ñ ëèíåéíîé çàâèñèìîñòüþ ïëîòíîñòè îò ôóíêöèè òîêà;

– òå÷åíèå æèäêîñòè íàä áàðüåðàìè.

Ðåçóëüòàòû ïî èññëåäîâàíèþ ýòèõ ðåæèìîâ òå÷åíèÿ ìîæíî íàéòè â [3].

Ëèòåðàòóðà

1. Ñàìàðñêèé À.À. Òåîðèÿ ðàçíîñòíûõ ñõåì. Ì., 1983.
2. Ñàìàðñêèé À.À., Ãóëèí À.Â. ×èñëåííûå ìåòîäû. Ì., 1989.
3. Yih C.-S. Stratified Flows New York: Academic Press, 1980.