ÓÄÊ 517.11: 518.5

Â.À. Ãîíîâ

Çàìêíóòàÿ ìàøèííî-îðàêóëüíàÿ ìîäåëü àðèôìåòèêè òðàíñôèíèòíûõ òèïîâ

Â íàñòîÿùåé ðàáîòå ïðîäîëæåíû èññëåäîâàíèÿ, îïèñàííûå â [1]. Ïî ïðîèçâîëüíîé îðäèíàëüíîé íóìåðàöèè ν åñòåñòâåííûì îáðàçîì îïðåäåëÿåòñÿ ïîëóôîðìàëüíàÿ ñèñòåìà $L[\nu]$, êîòîðàÿ âêëþ÷àåò àðèôìåòèêó íàòóðàëüíûõ ÷èñåë è ñîäåðæèò ôóíêöèîíàëüíûå ïåðåìåííûå ñïåöèàëüíûõ òèïîâ. Òèïàìè ïåðåìåííûõ ÿâëÿþòñÿ îðäèíàëû, âõîäÿùèå â ν, è äëÿ êàæäîãî òèïà â $L[\nu]$ ââåäåíà ñîîòâåòñòâóþùàÿ ñõåìà àêñèîì ñâåðòûâàíèÿ. Çàòåì îïðåäåëÿþòñÿ ôóíêöèîíàëû òðàíñôèíèòíûõ òèïîâ, âû÷èñëèìûå îòíîñèòåëüíî ñåìåéñòâà îðàêóëîâ $\Im$ ñïåöèàëüíîãî âèäà. Âîçíèêàåò çàäà÷à – ïîñòðîèòü òàêîå ñåìåéñòâî îðàêóëîâ $\Im$, äëÿ êîòîðîãî $\Im$-âû÷èñëèìûå ôóíêöèîíàëû îáðàçóþò ìîäåëü ñèñòåìû $L[\nu]$.

Â ðàáîòå [1] ðàçðàáîòàí íåêîòîðûé ñïîñîá ïîñòðîåíèÿ òàêèõ ñåìåéñòâ îðàêóëîâ, íî ýòîò ñïîñîá íå ó÷èòûâàåò ñëåäóþùåé ñèòóàöèè. Òèïû ïåðåìåííûõ çàäàþòñÿ èçâíå ñ ïîìîùüþ ν, ïîýòîìó ìîæåò ñëó÷èòüñÿ òàê, ÷òî ïîëó÷åííàÿ ìîäåëü ñîäåðæèò îðäèíàëû, íå ÿâëÿþùèåñÿ òèïàìè ýëåìåíòîâ $L[\nu]$. Â äàííîé ðàáîòå îïèñàí íîâûé ïðîöåññ ïîñòðîåíèÿ ñåìåéñòâà îðàêóëîâ, äëÿ êîòîðîãî âû÷èñëèìûå ôóíêöèîíàëû òàêæå îáðàçóþò ìîäåëü ñèñòåìû $L[\nu]$, íî ïðè ýòîì â êà÷åñòâå ν ðàññìàòðèâàåòñÿ íóìåðàöèÿ *F*-âû÷èñëèìûõ îðäèíàëîâ äëÿ íåêîòîðîãî îðàêóëà *F* èç ïîñòðîåííîãî ñåìåéñòâà. Èíà÷å ãîâîðÿ, ñåìåéñòâî $\Im$ äàåò ìîäåëü òîãî ôðàãìåíòà òåîðèè òðàíñôèíèòíûõ òèïîâ, êîòîðûé îíî ñàìî ïîðîæäàåò. Êðîìå òîãî, â ïîëó÷åííîé ìîäåëè ñèñòåìû $L[\nu]$ âûïîëíÿþòñÿ àíàëîãè âñåõ àêñèîì ñèñòåìû ìíîæåñòâ *ZF*.

Äëÿ êàæäîãî îðäèíàëà γ îïðåäåëèì ìíîæåñòâî O_γ îáúåêòîâ òðàíñôèíèòíîãî òèïà γ. Ïîëàãàåì: $O_0 = N$ – ìíîæåñòâî íàòóðàëüíûõ ÷èñåë, $\grave{O}_{\gamma+1}$ – ìíîæåñòâî âñåõ îäíîìåñòíûõ òîòàëüíûõ îòîáðàæåíèé âèäà $\grave{O}_\gamma \to N$, è åñëè σ – ïðåäåëüíûé îðäèíàë, òî $O_\gamma = \cup\{\grave{O}_\gamma / \gamma < \sigma\}$. Ýëåìåíòû ìíîæåñòâà O_γ áóäåì íàçûâàòü *ôóíêöèîíàëàìè òèïà* γ è îáîçíà÷àòü áóêâàìè G^γ, H^γ ñ âåðõíèì èíäåêñîì γ.

Ïóñòü ν - ïðîèçâîëüíàÿ íóìåðàöèÿ íà÷àëüíîãî îòðåçêà ñ÷åòíûõ îðäèíàëîâ; $K[\nu]$ – åå íîìåðíîå ìíîæåñòâî; $|\nu|$ – åå äëèíà. Çàïèñü νm îáîçíà÷àåò îðäèíàë ñ íîìåðîì *m* è áóêâû g^m, h^m ñ âåðõíèì èíäåêñîì *m* îáîçíà÷àþò ïåðåìåííûå òðàíñôèíèòíîãî òèïà νm, ïðèíèìàþùèå çíà÷åíèÿ èç $\grave{O}_{\nu m}$. Ïóñòü $R^ê$ îáîçíà÷àåò *ê*-ìåñòíûé ïðåäèêàòíûé ñèìâîë. *Ôîðìàìè* áóäåì íàçûâàòü âñåâîçìîæíûå âûðàæåíèÿ âèäà

$$(Q_1 h_1^{m1}) \dots (Q_i h_i^{mi}) R^{i+j}(g_1^{n1}, \dots , g_j^{nj}, h_1^{m1}, \dots , h_i^{mi}), \qquad (1)$$

ãäå $Q_1, \dots, Q_i$ – êâàíòîðû ∀, ∃. Äëÿ îáîçíà÷åíèÿ ôîðì èñïîëüçóåì çàãëàâíûå áóêâû *À* è *Â*. Çàôèêñèðóåì ãåäåëåâó íóìåðàöèþ âñåõ ôîðì âèäà (1). Äëÿ óïðîùåíèÿ çàïèñè òàì, ãäå ýòî âîçìîæíî, ìû áóäåì îïóñêàòü èíäåêñû ïåðåìåííûõ è ôóíêöèîíàëîâ è áóêâàìè *x*, *y* óñëîâèìñÿ îáîçíà÷àòü ÷èñëîâûå ïåðåìåííûå è íàòóðàëüíûå ÷èñëà. Ïóñòü $S[\nu]$ – ìíîæåñòâî ôîðì (1), ó êîòîðûõ âåðõíèå èíäåêñû ïåðåìåííûõ ïðèíàäëåæàò $K[\nu]$. ×åðåç $\overline{T_d}$ îáîçíà÷èì ìíîæåñòâî âñåâîçìîæíûõ êîðòåæåé $(G_1^{\gamma 1}, \dots , G_n^{\gamma n})$, ãäå $\gamma_1, \dots, \gamma_n < \delta$. Äëÿ êðàòêîñòè ýëåìåíòû $\overline{T_d}$ áóäåì îáîçíà÷àòü ÷åðåç $\overline{G}$ èëè $\overline{H}$, îäíîýëåìåíòíûé êîðòåæ (G) – ÷åðåç G è îáîçíà÷åíèå ïóñòîãî êîðòåæà áóäåì îïóñêàòü. Çàïèñü $\overline{G}\,\overline{H}$ îáîçíà÷àåò cîåäèíåíèå êîðòåæåé $\overline{G}$ è $\overline{H}$. Àíàëîãè÷íûå ñîãëàøåíèÿ ïðèíèìàåì äëÿ îáîçíà÷åíèÿ ñïèñêîâ ïåðåìåííûõ.

Ïóñòü Y – ìíîæåñòâî ôóíêöèîíàëîâ, èìåþùèõ òèïû $\gamma < |\nu|$; *À* – ôîðìà âèäà (1) è *R* – ïðåäèêàòíûé ñèìâîë â *À*. Çàôèêñèðóåì ïàðàìåòðû â *À* äîïóñòèìûìè çíà÷åíèÿìè èç $\overline{G}$ èç $\overline{T_d}$, $\delta < |\nu|$, è ïóñòü äëÿ êàæäîãî $\gamma < |\nu|$ ïåðåìåííûå òèïà γ â *À* ïðîáåãàþò ìíîæåñòâî $Y \cap \grave{O}_\gamma$, à ñèìâîë *R* èíòåðïðåòèðóåòñÿ êàê íåêîòîðîå îòíîøåíèå R^*. Òîãäà çàïèñü $Y \models_{R^*} À(\overline{G})$ îçíà÷àåò, ÷òî ôîðìà *À* èñòèííà ïðè ýòîé èíòåðïðåòàöèè.

Îáû÷íûì îáðàçîì îïðåäåëÿþòñÿ *F*-âû÷èñëèìûå ÷èñëîâûå äåðåâüÿ ñ îáðûâîì öåïåé, èõ *F*-íîìåðà è âûñîòû. Ïóñòü $|z|$ – îáîçíà÷àåò âûñîòó òàêîãî äåðåâà ñ *F*-íîìåðîì *z*, òîãäà îðäèíàëû âèäà $|z|$ íàçûâàþòñÿ *F-âû÷èñëèìûìè*. *F*-íîìåðà *F*-âû÷èñëèìûõ äåðåâüåâ ñ îáðûâîì öåïåé îáðàçóþò îðäèíàëüíóþ íóìåðàöèþ, êîòîðóþ áóäåì îáîçíà÷àòü ÷åðåç $n(F)$. Ñ÷èòàåì, ÷òî $|m_0| = 0$ äëÿ ëþáîãî îðàêóëà *F*.

Ïóñòü $\Im = \{ F_{\overline{G}} / \overline{G} \in \overline{T_d}, \delta < |\nu|\}$ – ñåìåéñòâî îðàêóëîâ, ãäå ν – íåêîòîðàÿ îðäèíàëüíàÿ íóìåðàöèÿ è êàæäîìó $\overline{G}$ èç $\overline{T_d}$, $\delta < |\nu|$ ñîîòíåñåí îðàêóë $F_{\overline{G}}$ âèäà $N \to N$. Ôóíêöèîíàë $H(\overline{g})$ îò ïåðåìåííûõ $\overline{g}$ íàçûâàåòñÿ *$\Im$-âû÷èñëèìûì*, åñëè ñóùåñòâóåò ìàøèíà *q* òàêàÿ, ÷òî äëÿ ëþáîãî äîïóñòèìîãî êîðòåæà $\overline{G} \in \overline{T_d}$, $\delta < |\nu|$, âûïîëíÿåòñÿ ñîîòíîøåíèå $\{q\}^{F_{\overline{G}}}(0) \cong H(\overline{G})$, ãäå $\{q\}^{F_{\overline{G}}}$(õ) îáîçíà÷à-

÷àåò ôóíêöèþ îò *õ*, âû÷èñëÿåìóþ íà ìàøèíå q ñ îðàêóëîì $F_{\bar{G}}$. Ïðè ýòîì íîìåð ìàøèíû q íàçûâàåòñÿ $\Im$-*êîäîì* ôóíêöèîíàëà $H(\bar{g})$. Ôóíêöèîíàë $H(\bar{g})$ íàçûâàåòñÿ $\Im$-*âû÷èñëèìûì îòíîñèòåëüíî êîíòåêñòà* $\bar{G}$, åñëè äëÿ íåêîòîðîãî $\Im$-âû÷èñëèìîãî ôóíêöèîíàëà $H'(\bar{g}',\bar{g})$ âûïîëíÿåòñÿ ñîîòíîøåíèå $H(\bar{g}) \cong H'(\bar{G}',\bar{g})$. Åñòåñòâåííûì îáðàçîì îïðåäåëÿåì $\Im$-ðàçðåøèìûå è $\Im$-ðàçðåøèìûå îòíîñèòåëüíî $\bar{G}$ ïðåäèêàòû è èõ $\Im$-êîäû. ×åðåç $F[\Im; \bar{G}]$ îáîçíà÷èì ìíîæåñòâî âñåõ îáû÷íûõ òîòàëüíûõ ôóíêöèîíàëîâ, ÿâëÿþùèõñÿ $\Im_\gamma$-âû÷èñëèìûìè îòíîñèòåëüíî êîíòåêñòà $\bar{G}$. Ôóíêöèîíàëû èç $F[\Im]$ èìåþò ÷èñëîâûå $\Im$-êîäû, ïîýòîìó ñ÷èòàåì, ÷òî $F[\Im]$ âïîëíå óïîðÿäî÷åíî.

Îïðåäåëèì ñëåäóþùóþ ôîðìóëüíóþ ñèñòåìó $L[\nu]$. ×èñëîâûå è ôóíêöèîíàëüíûå ïåðåìåííûå ðàçëè÷íûõ òèïîâ îïðåäåëåíû âûøå. ßçûê $L[\nu]$ ñîäåðæèò ñèìâîëû îïåðàöèé ′, +, · è ïåðåìåííûå ðàçëè÷íûõ òèïîâ $\gamma < |\nu|$; â êà÷åñòâå êîíñòàíò èñïîëüçóåì òîëüêî íàòóðàëüíûå ÷èñëà. Òåðìû è ôîðìóëû îïðåäåëÿþòñÿ åñòåñòâåííûì îáðàçîì. Íàïðèìåð: à) åñëè $\nu m = \nu k + 1$, òî $g^m(h^k)$ – òåðì; á) åñëè νm – ïðåäåëüíûé îðäèíàë è $\nu k < \nu m$, òî $g^m(h^k)$ – òåðì. Äëÿ îáîçíà÷åíèÿ ôîðìóë ñèñòåìû $L[\nu]$ èñïîëüçóåì áóêâû φ, ψ. Îáû÷íûì îáðàçîì îïðåäåëÿåì ñâîáîäíûå è ñâÿçàííûå ïåðåìåííûå. Àêñèîìàìè ñèñòåìû $L[\nu]$ ÿâëÿþòñÿ ëîãè÷åñêèå àêñèîìû èç èñ÷èñëåíèÿ ïðåäèêàòîâ ñ ðàâåíñòâîì, àêñèîìû äëÿ íàòóðàëüíûõ ÷èñåë è ñëåäóþùèå *ñõåìû àêñèîì ñâåðòûâàíèÿ*:

$$(\forall h_1^{m1}) \dots (\forall h_i^{mi})(\exists g^m)(\forall h^k)[g^m(h^k) = 0 \leftrightarrow \varphi(\bar{h}, {}^k)], \qquad (2)$$

ãäå $\varphi(\bar{h}, h^k)$ – ïðîèçâîëüíàÿ ôîðìóëà $L[\nu]$, íå ñîäåðæàùàÿ ïåðåìåííîé g^m, $\nu m = \nu k + 1$; h^k – ñâîáîäíàÿ ïåðåìåííàÿ; $\bar{h}$ – ïàðàìåòðû.

Äëÿ ïîñòðîåíèÿ ñåìåéñòâà îïåðàòîðîâ $\Im$ â ñëåäóþùèõ ïóíêòàõ À1–À3 èíäóêöèåé ïî γ îïðåäåëÿåì òðàíñôèíèòíóþ ïîñëåäîâàòåëüíîñòü íàáîðîâ è ñåìåéñòâî îïåðàòîðîâ âèäà:

$$(Y_\gamma; \angle_\gamma),\ \Im_\gamma = \{F_{\bar{G}\gamma} / \bar{G} \in \overline{T_d},\ \delta < |\nu(F_\gamma)|\}. \qquad (3)$$

Çäåñü F_γ – îïåðàòîð èç $\Im_\gamma$, ñîîòâåòñòâóþùèé ïóíêòó êîíñòðóêöèè; $\nu(F_\gamma)$ – íóìåðàöèÿ òîòàëüíûõ F_γ-âû÷èñëèìûõ îðäèíàëîâ; $(Y_\gamma; \angle_\gamma)$ – âïîëíå óïîðÿäî÷åííîå ìíîæåñòâî òîòàëüíûõ îáû÷íûõ ôóíêöèîíàëîâ.

À1. Ïóñòü $\Im_0 = \{G_{\bar{G}.0} / \bar{G} \in \overline{T_d},\ \delta < |\nu(F_0)|\}$, ãäå $F_0 = \varnothing$ è äëÿ âñåõ $\bar{G}$: $F_{\bar{G}0} = \varnothing$. Êðîìå òîãî, $Y_0 = \{G_{\bar{d}.0} / \delta < |\nu(F_0)|\}$, ãäå $G_{00} = 0$ è äëÿ êàæäîãî $\delta > 0$ $G_{\delta 0}$ – ôóíêöèîíàë èç T_δ, òîæäåñòâåííî ðàâíûé 0. Ïîðÿäîê $\angle_0$ íà Y_0 îçíà÷àåò ñðàâíåíèå ôóíêöèîíàëîâ ïî èõ òðàíñôèíèòíûì òèïàì.

À2. Ïóñòü $\Im_\gamma$, $(Y_\gamma; \angle_\gamma)$ îïðåäåëåíû; F_γ, $\nu(F_\gamma)$, $F[\Im_\gamma]$, $S[\nu(F_\gamma)]$ – ñîîòâåòñòâóþùèå èì îáúåêòû óêàçàííîãî âûøå âèäà. Ðàññìàòðèâàåì äâà âîçìîæíûõ ñëó÷àÿ.

1. Ïóñòü $F[\Im_\gamma] \not\subset Y_\gamma$, òîãäà ïîëàãàåì: $Y_{\gamma+1} = Y_\gamma \cup F[\Im_\gamma]$ è $\Im_{\gamma+1} = \Im_0$, ãäå $\Im_0$ èç ïóíêòà À1. Ïðè ýòîì ïîðÿäîê $\angle_{\gamma+1}$ ñëåäóþùèé: ýëåìåíòû èç $F[\Im_\gamma] - Y_\gamma$ ïðåäøåñòâóþò âñåì ýëåìåíòàì èç Y_γ, à ìåæäó ñîáîé ýëåìåíòû $F[\Im_\gamma]$ è Y_γ ñðàâíèâàþòñÿ ñîãëàñíî ïîðÿäêàì, èìåþùèìñÿ íà ýòèõ ìíîæåñòâàõ.

2. Ïóñòü $F[\Im_\gamma] \subseteq Y_\gamma$, òîãäà ïîëàãàåì: $(Y_{\gamma+1}; \angle_{\gamma+1}) = (Y_\gamma; \angle_\gamma)$, è $\Im_{\gamma+1} = \{F_{\bar{G}g+1} / \bar{G} \in \overline{T_d},\ \delta < |\nu(F_\gamma)|\}$, ãäå îïåðàòîðû $F_{\bar{G}g+1}$ îïðåäåëÿþòñÿ ñîãëàñíî ñëåäóþùèì ïóíêòàì Á1–Á4, â êîòîðûõ $\bar{G} = (G_1, ..., G_n) \in \overline{T_d}$, $\delta < |\nu(F_\gamma)|$, $\bar{g}$ – ñïèñîê ïåðåìåííûõ äëÿ $\bar{G}$ c èíäåêñàìè èç $K(\nu(F_\gamma))$, $\bar{G}(H, j) = (G_1, ..., G_{j-1}, H, G_j, ..., G_n)$.

Á1. Åñëè $u = \langle 0, i, j\rangle$, $(1 \le i, j \le n)$, $\bar{G} = (G_1, ..., G_n)$, òî

$$F_{\bar{G}g+1}(u) = \begin{cases} G_i, & i = g \quad G_i \in T_0; \\ G_i(G_j), & \text{если } i \ne j \quad G_i(G_j), \text{ определено.} \end{cases}$$

Á2. Åñëè $u = \langle 1, z, k, m, y\rangle$, $m, k \in K(\nu(F_\gamma))$, $H = \lambda h^k.\{z\}^{F_{\bar{G}h.g}}(0)$, òî

$$F_{\bar{G}g+1}(u) \cong \begin{cases} F_{\bar{G}z.g}(y), & \text{если } m = m_0, \\ F_{\bar{G}H.g}(y), & \text{если } m \ne m_0 \text{ и } H \in T_{|m|}. \end{cases}$$

Á3. Ïóñòü a – íîìåð $A(\bar{g}') = (\exists h^k)R(\bar{g}', h^k) \in S[\nu(F_\gamma)]$; $\bar{G} = (G_1, ..., G_n)$; $\bar{g}'$ – ñïèñîê ïàðàìåòðîâ â $A(\bar{g}')$, ïðè ýòîì $\bar{g}' \subseteq \bar{g}'$; $\bar{G}'$ – êîðòåæ çíà÷åíèé $\bar{g}'$, ñîñòàâëåííûé èç ôóíêöèîíàëîâ, ñòîÿùèõ íà ñîîòâåòñòâóþùèõ ìåñòàõ â $\bar{G}$; $\bar{G}''$ ïîëó÷àåòñÿ èç $\bar{G}$ óäàëåíèåì ýëåìåíòîâ $\bar{G}'$ áåç ïåðåñòàíîâêè îñòàâøèõñÿ ýëåìåíòîâ; z – $\Im_\gamma$-êîä $\Im_\gamma$-ðàçðåøèìîãî îòíîñèòåëüíî $\bar{G}''$ ïðåäèêàòà R_z. Òîãäà:

à) åñëè $u = \langle 2, a, z\rangle$, òî

$$F_{\bar{G}g+1}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Psi \models_{RZ} A(\bar{G}), \\ 1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

á) åñëè $u = \langle 3, a, z, j\rangle$, $1 \le j \le n + 1$, $Y_\gamma \not\models_{Rz} A(\bar{G}')$ è $H_0 = min\{\overline{H'} \in Y_\gamma \cap T_{|k|} \ /\ Y_\gamma \models_{Rz} R(\bar{G}', \overline{H'})\}$, òî äëÿ ëþáîãî H:

$$F_{\bar{G}.(H,j).g+1}(u) = \begin{cases} \langle 0, H_0\rangle & \text{если } H_0 \in T_0; \\ \langle 1, H_0(H)\rangle & \text{если } H_0(H) \text{ определено.} \end{cases}$$

Åñòåñòâåííûì îáðàçîì ïóíêòû Á1-Á3 ðàñïðîñòðàíÿþòñÿ íà ñëó÷àé, êîãäà $\overline{G}$ – ïóñòîé êîðòåæ.

Á4. Â îñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ, ïîëàãàåì: $F_{\overline{G}g+1}(u)$ íå îïðåäåëåíî.

À3. Ïóñòü γ – ïðåäåëüíûé îðäèíàë, òîãäà ïîëàãàåì: $Y_\gamma = \cup\{Y_{\gamma'} \,/\, \gamma' < \gamma\}$ è ëþáûå ýëåìåíòû Y_γ ñðàâíèâàþòñÿ ìåæäó ñîáîé, êàê ýëåìåíòû íàêîïèòåëÿ $Y_{\gamma'}$ $\gamma' < \gamma$, êîòîðîìó îíè îäíîâðåìåííî ïðèíàäëåæàò. Òåïåðü îðàêóëû ñåìåéñòâà $\Im_\gamma$ îïðåäåëÿåì ñîãëàñíî ñëåäóþùèì ñëó÷àÿì.

1. Ïóñòü ñóùåñòâóåò îðäèíàë $\gamma_0 < \gamma$, íà÷èíàÿ ñ êîòîðîãî íàêîïèòåëè $(Y_{\gamma'}; \angle_{\gamma'})$, $\gamma_0 \le \gamma' < \gamma$ ñòàáèëèçèðóþòñÿ. Ñíà÷àëà îïðåäåëÿåì îðàêóë, ñîîòâåòñòâóþùèé ïóñòîìó êîðòåæó: $F_\gamma = \cup\{ F_{\gamma'} \,/\, \gamma_0 \le \gamma' < \gamma\}$. Çàòåì ââîäèì íóìåðàöèþ $\nu(F_\gamma)$ è ðàññìàòðèâàåì ïðîèçâîëüíûé êîðòåæ $\overline{G} \in \overline{T_d}$, $\delta < |\nu(F_\gamma)|$. Ââèäó ïðåäåëüíîñòè γ íàéäåòñÿ îðäèíàë γ_1 òàêîé, ÷òî $\gamma_0 \le \gamma_1 < \gamma$ è $\overline{G} \in \overline{T}_{|T(F_{g1})|}$. Äëÿ íàèìåíüøåãî òàêîãî γ_1 ïîëàãàåì: $F_{\overline{G}g} = \cup\{ F_{\overline{G}g'} \,/\, \gamma_1 \le \gamma' < \gamma\}$.

2. Åñëè óêàçàííûé â ïðåäûäóùåì ïóíêòå îðäèíàë γ_0 íå ñóùåñòâóåò, òî $\Im_\gamma = \Im_0$, ãäå $\Im_0$ èç ïóíêòà À1.

Ïîñòðîåíèå ñåìåéñòâ (3) çàêîí÷åíî. Êîððåêòíîñòü ýòîé êîíñòðóêöèè îáîñíîâûâàåòñÿ ñëåäóþùèì îáðàçîì. Íàêîïèòåëè Y_γ ìîíîòîííî ðàñøèðÿþòñÿ ñ ðîñòîì γ è îãðàíè÷åíû ìíîæåñòâîì âñåõ êîíå÷íûõ êîðòåæåé ôóíêöèîíàëîâ ñ÷åòíûõ òèïîâ $\cup\{\overline{T_d} \,/\, \delta < \aleph_1\}$. Îòíîøåíèÿ $\angle_\gamma$ ïðîäîëæàþò äðóã äðóãà è òàêæå îãðàíè÷åíû. Ïî òåîðåìå Õàðòîãñà [2, ñ. 207], íàêîïèòåëè $(Y_\gamma; \angle_\gamma)$ ñòàáèëèçèðóþòñÿ íà íåêîòîðîì îðäèíàëå γ_0: $Y\gamma_0 = Y\gamma_{0+1} = \ldots$. Çàôèêñèðóåì òàêîé îðäèíàë γ_0. Òîãäà, íà÷èíàÿ ñ γ_0, îðàêóëû F_γ ìîíîòîííî ðàñøèðÿþòñÿ. Ïî òåîðåìå Õàðòîãñà [2, ñ. 207], íàéäåòñÿ îðäèíàë $\gamma_1 > \gamma_0$, íà÷èíàÿ ñ êîòîðîãî îðàêóëû F_γ è íóìåðàöèè $n(F_\gamma)$ ñòàáèëèçèðóþòñÿ. Òåïåðü â ïîñëåäîâàòåëüíîñòè (3) áóäóò ðàñøèðÿòüñÿ òîëüêî îðàêóëû $F_{\overline{G}g'}, \overline{G} \in \overline{T}_{|T(F_{g1})|}$. Ñîâîêóïíîñòü òàêèõ îðàêóëîâ îãðàíè÷åíà è, ñëåäîâàòåëüíî, ýòè îðàêóëû ñòàáèëèçèðóþòñÿ íà íåêîòîðîì îðäèíàëå. Îòñþäà ñëåäóåò, ÷òî ñåìåéñòâà (3) òàêæå ñòàáèëèçèðóþòñÿ, ò.å. ñóùåñòâóåò îðäèíàë $\gamma_2 \ge \gamma_1$ òàêîé, ÷òî äëÿ âñåõ $\overline{G} \in \overline{T_d}$, $\delta < |\nu(F_{\gamma1})|$, $F_{\overline{g}.g2} = F_{\overline{g}.g2+1} = \ldots$. Çàôèêñèðóåì òàêîé îðäèíàë γ_2 è ïîëîæèì:

$$(Y; \angle) = (Y_{\gamma2}; \angle_{\gamma2}) \text{ è } \Im = \{F_{\overline{G}} \,/\, \overline{G} \in \overline{T_d}, \delta < |\nu|\}, \quad (4)$$

ãäå $F = F_{\gamma1}$, $\nu = \nu(F_{\gamma1})$, $F_{\overline{G}} = F_{\overline{g}.g2}$ äëÿ âñåõ $\overline{G} \in \overline{T_d}$, $\delta < |\nu(F_{\gamma1})|$.

Àíàëîãè÷íî ñîîòâåòñòâóþùèì óòâåðæäåíèÿì èç [1, c. 44–48] äîêàçûâàþòñÿ ñëåäóþùèå ñâîéñòâà ñåìåéñòâà (4). *Âû÷èñëèìîñòü îðàêóëîì $F_{\overline{G}}$ ñîõðàíÿåòñÿ ïðè ðàñøèðåíèè åãî èíäåêñà. Âû÷èñëèìûå ôóíêöèîíàëû ìîæíî èñêëþ÷àòü èç èíäåêñà îðàêóëà $F_{\overline{G}}$. Îòíîøåíèå èñòèííîñòè* ïðîèçâольной формы А *èç* $S[\nu]$ *íà íàêîïèòåëå* Y_δ *ÿâëÿåòñÿ* $\Im$*-ðàçðåøèìûì.* Íî äëÿ ïîñòðîåíèÿ èñêîìîé ìîäåëè ñèñòåìû $L[\nu]$ íåîáõîäèìî ïîêàçàòü $\Im$-ðàçðåøèìîñòü îòíîøåíèÿ èñòèííîñòè ôîðìóë ñèñòåìû $L[\nu]$ íà ìíîæåñòâå $\Im$-âû÷èñëèìûõ ôóíêöèîíàëîâ. Ïóñòü $F[\Im]$ – ìíîæåñòâî âñåõ ôóíêöèîíàëîâ èç $T_{|\nu(F)|}$, ÿâëÿþùèõñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûõ îòíîñèòåëüíî ïóñòîãî êîðòåæà. Èç ñòàáèëèçàöèè ñåìåéñòâ (3) ñëåäóåò, ÷òî $F[\Im] \subseteq Y$. *Òîãäà îòíîøåíèå èñòèííîñòè ôîðìû $À(\overline{G})$ èç $S[\nu]$ íà íàêîïèòåëå Y ýêâèâàëåíòíî îòíîøåíèþ èñòèííîñòè $À(\overline{G})$ íà $F[\Im]$.*

Òåïåðü ðàññìîòðèì ôîðìàëüíóþ ñèñòåìó $L[\nu]$, è ïóñòü ïåðåìåííûå îðäèíàëüíûõ òèïîâ $\gamma < |\nu|$ ïðîáåãàþò ìíîæåñòâà $Y \cap Ò_\gamma$, à îïåðàöèè $+, \cdot, '$ îáîçíà÷àþò îáû÷íûå îïåðàöèè íàä ÷èñëàìè. Àíàëîãè÷íî [1, ñ. 50] ïîêàçûâàåòñÿ, ÷òî êàæäûé òåðì ñèñòåìû $L[\nu]$ è õàðàêòåðèñòè÷åñêàÿ ôóíêöèÿ ëþáîé ôîðìóëû èç $L[\nu]$ ÿâëÿþòñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûìè ôóíêöèîíàëàìè îò ïîäõîäÿùåãî íàáîðà ïåðåìåííûõ.

Ïîñòðîèì ìàøèííî-îðàêóëüíóþ ìîäåëü $Ì_{|\nu|}$ ñèñòåìû $L[\nu]$. Èíäóêöèåé ïî g îïðåäåëÿåì ìíîæåñòâà I_γ è ôóíêöèè G', óäîâëåòâîðÿþùèå ñëåäóþùèì óñëîâèÿì:

1) êàæäîìó $G \in F[\Im] \cap T_{\gamma+1}$ ñîîòâåòñòâóåò îïðåäåëåííûé ôóíêöèîíàë G' âèäà $I_\gamma \to N$ òàêîé, ÷òî äëÿ ëþáîãî $H \in F[\Im] \cap T_\gamma$ âûïîëíÿåòñÿ ðàâåíñòâî: $G'(H') = G(H)$;

2) $I_\gamma = \{ G' \,/\, G \in F[\Im] \cap T_\gamma\}$ äëÿ êàæäîãî $\gamma < |\nu|$.

Îáîçíà÷èì ÷åðåç $Ì_{|\nu|}$ ìíîæåñòâî $\cup\{ I_\gamma \,/\, \gamma < |\nu|\}$, è ïóñòü âñå ïåðåìåííûå òèïîâ $g < |n|$ ïðèíèìàþò çíà÷åíèÿ èç I_γ. Òîãäà èíäóêöèåé ïî ëîãè÷åñêîé ãëóáèíå ôîðìóëû $\varphi(\overline{h})$ äîêàçûâàåòñÿ ñëåäóþùåå óòâåðæäåíèå.

Òåîðåìà 1. *Äëÿ ëþáîé ôîðìóëû $\varphi(h)$ ñèñòåìû $L[\nu]$ è äëÿ êàæäîãî êîðòåæà $\overline{G}$ äîïóñòèìûõ çíà÷åíèé åå ïàðàìåòðîâ èç ìíîæåñòâà $F[\Im]$ îòíîøåíèå èñòèííîñòè $\varphi(\overline{G})$ íà $F[\Im]$ ýêâèâàëåíòíî îòíîøåíèþ èñòèííîñòè $\varphi(\overline{G'})$ íà $Ì_{|\nu|}$, ãäå êîðòåæ $\overline{G'}$ ñîñòàâëåí èç ýëåìåíòîâ $Ì_{|\nu|}$, ñîîòâåòñòâóþùèõ ýëåìåíòàì êîðòåæà $\overline{G}$.*

Òåïåðü ðàññìîòðèì àêñèîìó (2), â êîòîðîé ôîðìóëà $\varphi(h^k)$ ñèñòåìû $L[\nu]$ ñîäåðæèò ñâîáîäíóþ ïåðåìåííóþ h^k, $k \in K[\nu]$. Õàðàêòåðèñòè÷åñêàÿ ôóíêöèÿ ôîðìóëû $\varphi(h^k)$, íà ìíîæåñòâå Y, ÿâëÿåòñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûì ôóíêöèîíàëîì îò åå ïàðàìåòðîâ è h^k. Çàôèêñèðóåì åå ïàðàìåòðû äîïóñòèìûìè çíà÷åíèÿìè $\overline{H}$ èç $F[\Im]$. Òîãäà, ñîãëàñíî óêàçàííûì âûøå ñâîéñòâàì ñåìåéñòâà (4), ýòà ôóíêöèÿ áóäåò $\Im$-âû÷èñëèìûì ôóíêöèîíàëîì $G(h^k)$ îò h^k. Èç îïðåäåëåíèÿ ôóíêöèé $\overline{G'}$ è èç òåîðåìû 1 ñëåäóåò, ÷òî ñîîòâåòñòâóþùèé ôóíêöèîíàë $\overline{G'}(h^k)$ áóäåò óäîâëåòâîðÿòü àêñèîìå (2) ïðè ïàðàìåòðàõ $\overline{H}$. Òàêèì îáðàçîì, ìíîæåñòâî Ì$_{|\nu|}$ ÿâëÿåòñÿ ñòàíäàðòíîé ìîäåëüþ ñèñòåìû $L[\nu]$.

ßñíî òàêæå, ÷òî ëþáîé ôóíêöèîíàë G òèïà 1, îïðåäåëÿþùèé â ìîäåëè Ì$_{|\nu|}$ íåêîòîðûé ðàöèîíàë ÿâëÿåòñÿ F-âû÷èñëèìîé ÷èñëîâîé ôóíêöèåé, òîãäà F-êîä G ïðèíàäëåæèò $K[\nu]$, è, ñëåäîâàòåëüíî, ýòîò ðàöèîíàë ÿâëÿåòñÿ òèïîì ñèñòåìû $L[\nu]$.

Òåïåðü äàäèì êðàòêóþ õàðàêòåðèñòèêó ïîëó÷åííîé ñèñòåìû $L[\nu]$. Âî-ïåðâûõ, ñèñòåìà $L[\nu]$ íå ÿâëÿåòñÿ ôîðìàëüíîé â òîì ñìûñëå, êàê ýòî òðåáîâàëà ïðîãðàììà Ãèëüáåðòà ôîðìàëèçàöèè ìàòåìàòèêè. ßçûê $L[\nu]$ íå ÿâëÿåòñÿ ðåêóðñèâíî ðàçðåøèìûì, áîëåå òîãî, íå ñóùåñòâóåò F-âû÷èñëèìîé ïðîöåäóðû, ïîçâîëÿþùåé îïðåäåëèòü, ÿâëÿåòñÿ ëè äàííîå âûðàæåíèå òåðìîì èëè ôîðìóëîé ÿçûêà $L[\nu]$. Äåëî â òîì, ÷òî èíäåêñû ïåðåìåííûõ â ýòîì ÿçûêå ñóòü ýëåìåíòû ìíîæåñòâà $\nu(F)$, êîòîðîå íå ìîæåò áûòü F-ðàçðåøèìûì. Ñèñòåìà $L[\nu]$ îòíîñèòñÿ ê òàê íàçûâàåìûì ïîëóôîðìàëüíûì (èëè ïîëóýôôåêòèâíûì) ñèñòåìàì, â êîòîðûõ ìíîæåñòâî äîêàçóåìûõ ôîðìóë íå ÿâëÿåòñÿ ðàçðåøèìûì, íî ñîõðàíÿþòñÿ îñòàëüíûå òðåáîâàíèÿ, ïðåäúÿâëÿåìûå ïðîãðàììîé Ãèëüáåðòà. ßðêèì ïðèìåðîì òàêèõ ñèñòåì ñëóæèò àðèôìåòèêà íàòóðàëüíûõ ÷èñåë ñ òàê íàçûâàåìûì ω-ïðàâèëîì, â êîòîðîé âûâîä ôîðìóëû ïðåäñòàâëåí â âèäå áåñêîíå÷íûõ äåðåâüåâ ñ îáðûâîì öåïåé.

Ñðàâíèì $L[\nu]$ è åå ìîäåëü Ì$_{|\nu|}$ ñ àêñèîìàòè÷åñêîé ñèñòåìîé òåîðèè ìíîæåñòâ ZF. Ôóíêöèîíàë G òèïà $\gamma+1<|\nu|$ ìîæíî ðàññìàòðèâàòü êàê õàðàêòåðèñòè÷åñêóþ ôóíêöèþ ìíîæåñòâà S_G ñëåäóþùåãî âèäà: $\{H \in T_\gamma / G(H) = 0\}$. Ïðè ýòîì ôóíêöèîíàëû H òàêæå îïðåäåëÿþò ìíîæåñòâà ïîäîáíîãî âèäà, è ïîýòîìó ìîæíî ñ÷èòàòü, ÷òî ýëåìåíòàìè S_G ÿâëÿþòñÿ íåêîòîðûå ìíîæåñòâà. Íî òàê êàê H – ýòî ôóíêöèîíàëû îïðåäåëåííîãî òèïà γ, òî S_G íåëüçÿ ñ÷èòàòü ïðîèçâîëüíûì àáñòðàêòíûì ìíîæåñòâîì ðàíãà $\gamma+1$. Ïðîâåðèì âûïîëíåíèå â Ì$_{|\nu|}$ (ïðè äàííîé èíòåðïðåòàöèè ôóíêöèîíàëîâ) àêñèîì ñèñòåìû ZF. ßñíî, ÷òî èìååò ñìûñë ðàññìàòðèâàòü òîëüêî àêñèîìû âûäåëåíèÿ, ïîäñòàíîâêè è ñòåïåíè, òàê êàê âûïîëíåíèå îñòàëüíûõ àêñèîì î÷åâèäíî. Íà÷íåì ñ àêñèîìû âûäåëåíèÿ. Ôîðìóëàìè ïîëó÷åííîé ñèíòàêñè÷åñêîé ìîäåëè òåîðèè ìíîæåñòâ ÿâëÿþòñÿ ôîðìóëû ñèñòåìû $L[\nu]$. Ñîãëàñíî óêàçàííîìó âûøå ñïîñîáó ñåìåéñòâà (4), õàðàêòåðèñòè÷åñêàÿ ôóíêöèÿ ïðîèçâîëüíîé ôîðìóëû $\varphi(h^k)$ ñèñòåìû $L[\nu]$ ñ îäíîé ñâîáîäíîé ïåðåìåííîé h^k ÿâëÿåòñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûì ôóíêöèîíàëîì χ_φ îò h^k. È ïóñòü $G(h^k)$ – ïðîèçâîëüíûé $\Im$-âû÷èñëèìûé ôóíêöèîíàë, îïðåäåëÿþùèé ìíîæåñòâî S_G. Ïîëàãàåì äëÿ êàæäîãî $H \in T_{\nu k}$: $G_1(H) = 0 \leftrightarrow (\chi_\varphi(H) = 0 \wedge G(H) = 0)$. Òîãäà G_1 ÿâëÿåòñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûì ôóíêöèîíàëîì è îïðåäåëÿåò ìíîæåñòâî, êîòîðîå îáåñïå÷èâàåò âûïîëíåíèå â Ì$_{|\nu|}$ àíàëîãà àêñèîìû âûäåëåíèÿ.

Ðàññìîòðèì ñõåìó àêñèîì ïîäñòàíîâêè. Ïóñòü ôîðìóëà $\varphi(h^k, g^m)$ ñèñòåìû $L[\nu]$ îïðåäåëÿåò ôóíêöèþ îò h^k âèäà $T_{\nu k} \to T_{\nu m}$ è ïóñòü $\Im$-âû÷èñëèìûé ôóíêöèîíàë $G(h^k)$ îïðåäåëÿåò ìíîæåñòâî S_G. Òîãäà ñóùåñòâóåò $\Im$-âû÷èñëèìûé ôóíêöèîíàë $G_1(g^m)$, îïðåäåëÿþùèé õàðàêòåðèñòè÷åñêóþ ôóíêöèþ ôîðìóëû $\exists h^k(G(h^k) = 0 \wedge \varphi(h^k, g^m))$. Ýòî âëå÷åò âûïîëíåíèå â Ì$_{|\nu|}$ ñîîòâåòñòâóþùåé àêñèîìû ïîäñòàíîâêè.

Ïóñòü $\Im$-âû÷èñëèìûé ôóíêöèîíàë $G(h^k)$ òèïà νm îïðåäåëÿåò ìíîæåñòâî S_G. Ñòðîèì ôîðìóëó: $\forall h^k(g^m(h^k) = 0 \leftrightarrow G(h^k) = 0)$. Õàðàêòåðèñòè÷åñêàÿ ôóíêöèÿ ýòîé ôîðìóëû ÿâëÿåòñÿ $\Im$-âû÷èñëèìûì ôóíêöèîíàëîì G_1 îò g^m è îïðåäåëÿåò ìíîæåñòâî âñåõ ïîäìíîæåñòâ òèïà νm ìíîæåñòâà S_G. Îòñþäà ñëåäóåò, ÷òî â Ì$_{|\nu|}$ âûïîëíÿåòñÿ àíàëîã àêñèîìû ñòåïåíè, íî ýòîò àíàëîã íå ÿâëÿåòñÿ ïîëíûì, èáî ôóíêöèîíàë G_1 îïðåäåëåí íå äëÿ âñåõ àáñòðàêòíûõ ïîäìíîæåñòâ S_G.

Òàêèì îáðàçîì, â Ì$_{|\nu|}$ âûïîëíÿþòñÿ àíàëîãè âñåõ àêñèîì ñèñòåìû ZF. Íî äàííîå óòâåðæäåíèå íå ïðèâîäèò ê ïðîòèâîðå÷èþ, èáî, êàê áûëî îòìå÷åíî âûøå, ñèñòåìà $L[\nu]$ ÿâëÿåòñÿ ïîëóôîðìàëüíîé, è ïîòîìó òàêàÿ àíàëîãèÿ íå ÿâëÿåòñÿ ïîëíîé.

Ëèòåðàòóðà

1. Ãàíîâ Â.À. Âû÷èñëèìûå ôóíêöèîíàëû è àðèôìåòèêà îðäèíàëüíûõ òèïîâ // Ñèá. ìàòåì. æóðíàë. 1986. XXVII. ¹ 4.

2. Ìåíäåëüñîí Ý. Ââåäåíèå â ìàòåìàòè÷åñêóþ ëîãèêó. Ì., 1971.