

А.А.Лагутин, Р.И.Райкин, А.Г.Тюменцев

Распределение первого пробега в галактической среде фрактального типа

Представлены результаты исследования распределения свободного пробега частицы в резко неоднородной случайной среде фрактального типа. Для моделирования среды использован метод случайных блужданий со степенным распределением пробега. Установлено, что распределение первого пробега в среде с массовой фрактальной размерностью $0 < d_M < 2$ имеет степенную асимптотику $p(r) \sim r^{-\alpha-1}$. Исследована зависимость показателя α от фрактальной размерности среды при различных предположениях о сечении взаимодействия частицы с элементарными неоднородностями среды. Приведенные результаты обсуждаются в связи с задачей обобщения и уточнения параметров модели аномальной диффузии космических лучей в межзвездной среде фрактального типа.

1. Введение

Решение ключевой для современной астрофизики проблемы происхождения космических лучей экстремально высоких энергий невозможно без знания закономерностей распространения космических частиц в межзвездной среде. Исследования последних лет (см., например, [1–10]) свидетельствуют, что неоднородности в пространственном распределении вещества и магнитного поля Галактики, определяющие характер распространения космических частиц, наблюдаются в широком диапазоне масштабов. Таким образом, принятая на протяжении длительного времени диффузионная модель (см., например, [11, 12]), неявно предполагающая квазиоднородность среды, в которой происходит процесс переноса, оказывается, строго говоря, неприменимой.

Необходимость учета фрактальных свойств межзвездной среды стимулировала развитие новых моделей распространения космических лучей. В наших недавних работах [13–15] была предложена модель аномальной диффузии, приводящая к уравнениям переноса с производными дробного порядка. Аномальность диффузии в этой модели обусловлена тем, что при распространении частиц в средах с выраженными неоднородностями вещества и поля на разных масштабах возможны как сверхбольшие (по сравнению с предсказаниями стандартной диффузионной модели) свободные пробеги в крупномасштабных пустотах, так и длительное удержание в относительно компактных областях-ловушках. При этом для корректной формулировки модели аномальной диффузии, обоснования параметров

модели и выяснения их физического смысла, в том числе связи с параметрами среды, важнейшее значение имеет распределение свободного пробега частицы, а также времени удержания частицы в ловушках.

В настоящей работе проведено численное моделирование методом Монте-Карло переноса частицы во фрактальной среде. Исследовано распределение первого пробега. Приведенные результаты обсуждаются в связи с задачей обобщения и уточнения параметров модели аномальной диффузии космических лучей в межзвездной среде фрактального типа.

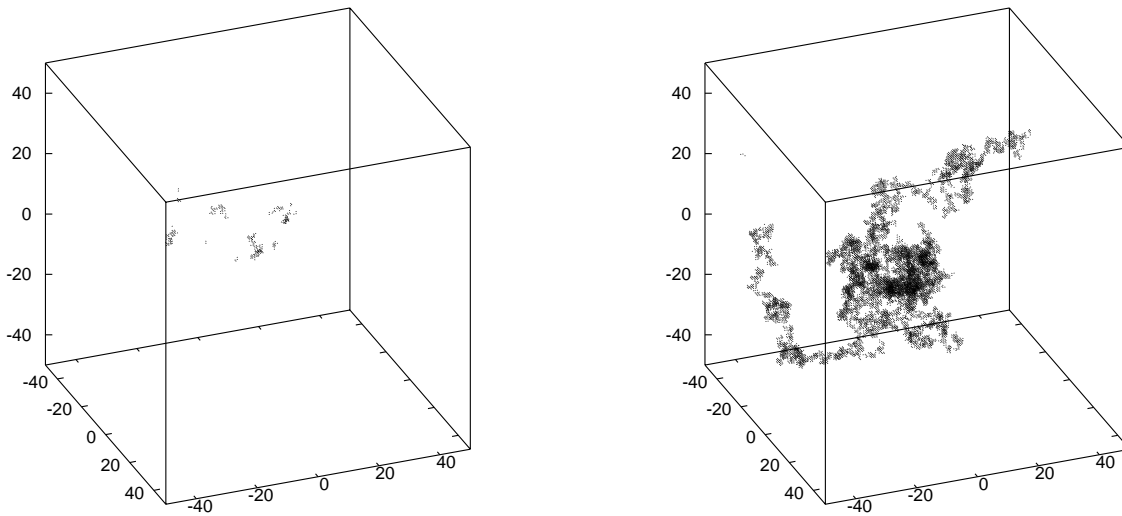
2. Моделирование фрактальной среды

Для моделирования фрактальной среды использована модификация [16–18] алгоритма Мандельброта [19]: гипотетическая частица совершает в трехмерном пространстве изотропные случайные блуждания с распределением по пробегам

$$P(l > x) = \begin{cases} (x/x_0)^{-\alpha'}, & x \geq x_0, \\ 0, & 0 < x < x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где масштабный параметр x_0 , как легко видеть, имеет смысл минимального пробега. Элементарные точечные неоднородности среды, структурой которых можно на рассматриваемых масштабах пренебречь, располагаются в узлах траектории блуждающей частицы. Когда узел попадает за пределы области моделирования (сферы радиуса R с центром в начале траектории), разыгрывается критический ветвящийся процесс: с вероятностью q_0 траектория обрывается, с вероятностью q_1 - сохраняется, с вероятностью $q_2 = q_0 - q_1$ - делится на две траектории, каждая из которых

Работа поддержана грантами программы “Университеты России” № 02.01.001 и РФФИ № 04–02–16724.



а)

б)

Рис. 1. Фрактальные множества, полученные при помощи модификации [16–18] алгоритма Мандельброта [19]. а) $d_H = 1.0$, б) $d_H = 1.75$.

в дальнейшем моделируется таким же образом. Пробеги всех частиц разыгрываются из прежнего распределения (1), и если какая-нибудь из этих частиц возвращается в область моделирования, ее моделирование вновь продолжается без поглощений и ветвлений до нового выхода за пределы сферы. С целью избежать выделенности начальной точки, из начала координат разыгрываются две случайных траектории, и их объединение рассматривается как одна реализация среды.

Описанным методом было произведено моделирование случайной среды для различных значений показателя α' . Массовая фрактальная размерность d_M получившегося множества находилась стандартным способом [19], используя свойство

$$\langle N(r) \rangle \sim r^{d_M}, \quad (2)$$

где $\langle N(r) \rangle$ - среднее число элементарных неоднородностей в шаре с радиусом r с центром в начале координат, усреднение производится по реализациям случайной среды.

Кроме того, для каждой реализации оценивалась фрактальная размерность Хаусдорфа d_H , исходя из соотношения (см., например, [20])

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_H}, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $N(\varepsilon)$ - число ячеек размера ε кубической пространственной сетки разбиения области моделирования, занятых точками среды. Индивидуальные оценки d_H затем усреднялись по случайным реализациям.

На рис. 1 показаны примеры фрактальных множеств, полученных описанным выше способом. Отметим, что для обеих реализаций приведенных на рис. 1 при фиксированном радиусе области моделирования $R = 100$, значение параметра x_0 распределения по пробегам (1), было выбрано таким образом, чтобы получить приблизительно одинаковое количество узлов траекторий ($\sim 10^5$). Хорошо видно, что для среды с меньшим значением фрактальной размерности характерны более высокая плотность вещества (и, соответственно, поля) в компактных скоплениях и одновременно с этим бóльшие по размеру пустоты.

На рис. 2 приведены зависимости размерности Хаусдорфа d_H и массовой размерности d_M от показателя α' распределения по пробегам (1). Как видно, в области $0 < \alpha' \lesssim 1$ значения d_H и d_M совпадают между собой и равны α' . С увеличением α рост обеих размерностей замедляется. При этом массовая размерность оказывается заметно больше размерности Хаусдорфа. Значение $d_M = 2$ является предельным значением массовой фрактальной размерности, которое можно получить в рамках данного алгоритма моделирования (см. [17, 18]).

3. Распределение первого пробега при диффузии на фракталах

Для исследования распределения свободного пробега частицы, распространяющейся во фрак-

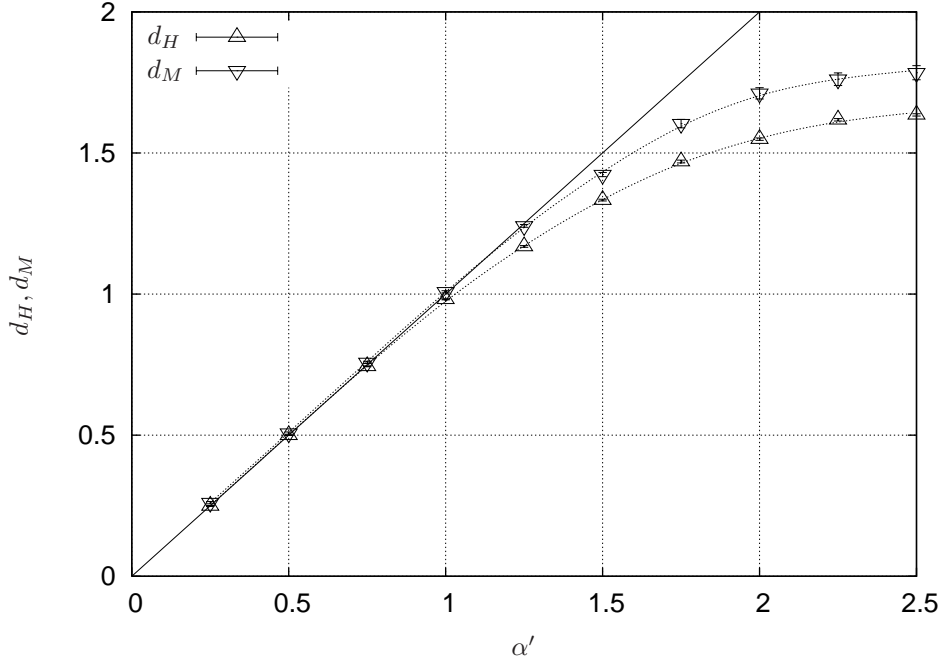


Рис. 2. Зависимости размерности Хаусдорфа d_H и массовой размерности d_M от показателя α' распределения по пробегам (1).

тальной среде, были использованы результаты следующего численного эксперимента.

Согласно алгоритму, описанному в п. 2, моделируется случайная реализация среды. Частица начинает движение из начала координат в изотропно выбранном направлении. Затем находится ближайшая к началу координат точка среды, расположенная на расстоянии $d \leq \rho$ от полупрямой, задающей траекторию частицы. Расстояние от найденной таким образом точки до начала траектории принимается в качестве длины первого пробега. Параметр ρ , очевидно, задает сечение $\sigma = \pi\rho^2$ взаимодействия частицы с элементарными неоднородностями среды. Другими словами, точечные элементарные неоднородности исходной среды заменяются шарами заданного радиуса ρ , после чего определяется расстояние от начала координат до центра шара, с которым частица совершает первое столкновение.

В наших расчетах для каждой реализации среды, моделировалось 10^4 траекторий. Затем проводилось усреднение полученного распределения пробегов по 500 реализациям среды при фиксированных значениях параметров α' , R/x_0 и ρ/x_0 .

Анализ результатов расчетов показал, что плотность распределения длины первого пробега имеет степенную асимптотику

$$p(r) \sim A(\alpha)r^{-\alpha-1}. \quad (4)$$

На рис. 3 показаны зависимости показателя $\alpha + 1$

от массовой фрактальной размерности среды d_M при $R/x_0 = 100$ и $\rho/x_0 = 0.01, 0.25, 1.0, 2.0, 10.0$.

Как видно из рис. 3, при $\rho \ll x_0$ связь между показателем асимптотики распределения длины первого пробега и массовой фрактальной размерностью среды имеет вид $\alpha + 1 = 3 - d_M$. Этот результат совпадает с результатом работы [21], где распределение длины свободного пробега частицы во фрактальной среде было получено аналитически для случая среды с неперекрывающимися неоднородностями ($\rho \leq \delta_{\min}/2$, где δ_{\min} - характерное минимальное расстояние между двумя элементарными неоднородностями среды).

Рост параметра ρ приводит к нарушению линейной зависимости $\alpha(d_M)$, что, как показано в [21], связано со слабыми отклонениями от степенной асимптотики (4), проявляющимися при конечных размерах среды.

При дальнейшем увеличении ρ элементарные неоднородности, рассматриваемые как мишени радиуса ρ для распространяющейся в среде частицы, могут перекрываться, образуя пространственные конфигурации сложной формы. Формально это приводит к нарушению скейлингового свойства фрактальной среды (2) на масштабах $r \lesssim 2\rho$. Следует заметить, что для алгоритма моделирования среды, использованного в настоящей работе, минимальное расстояние между элементарными неоднородностями ограничено сверху значением x_0 (см. (1)). Отсюда следу-

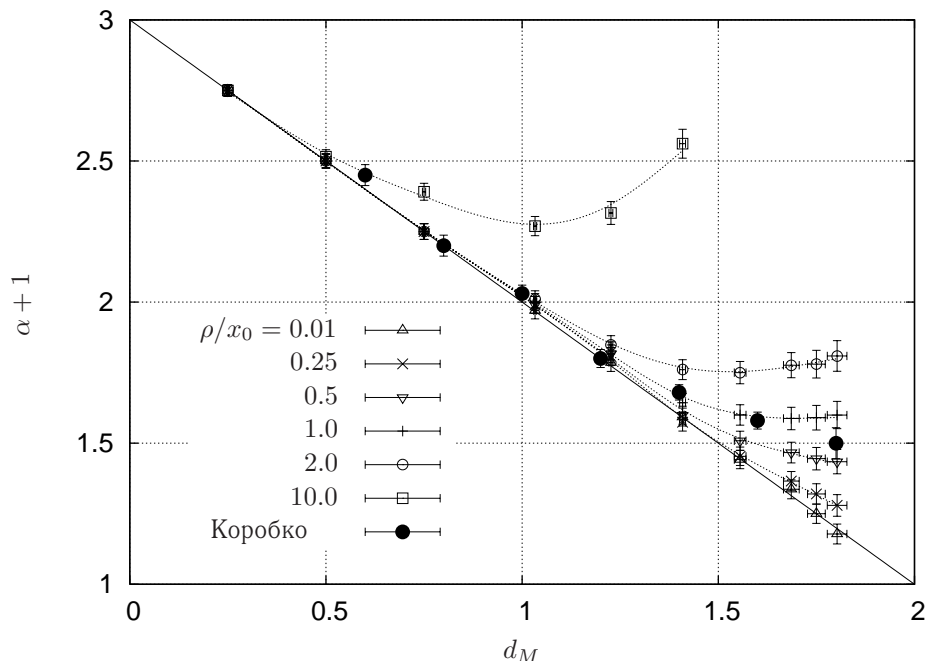


Рис. 3. Показатель $\alpha + 1$ распределения длины первого пробега в зависимости от массовой фрактальной размерности среды d_M . Результаты настоящей работы ($R/x_0 = 100$, $\rho/x_0 = 0.01, 0.25, 1.0, 2.0, 10.0$) и данные Коробко [17]

ет верхняя оценка границы применимости приближения неперекрывающихся неоднородностей: $\rho \leq x_0/2$. Наши расчеты показывают, что степенная асимптотика распределения по пробегам сохраняется и при больших значениях ρ вплоть до $\rho \sim 0.1R$, однако имеет место значительное укрупнение распределения по сравнению со случаем малых сечений. Зависимость $\alpha(d_M)$ становится резко нелинейной и содержит отчетливый минимум (см. рис.3).

В заключение отметим, что наши результаты удовлетворительно согласуются с данными работы [17] (см. рис.3), в которой использовался тот же алгоритм моделирования среды и расчета пробега при $\rho < x_0$, а распределение пробегов усреднялось по различным точкам среды, принимаемым в качестве источников частиц.

4. Заключение

Корректное описание процесса распространения космических лучей в Галактике требует учета фрактальных свойств межзвездной среды. Важнейшими характеристиками, определяющими диффузию во фрактальной среде, содержащей разномасштабные неоднородности вещества и поля, являются распределение свободного пробега и распределение времени пребывания в компактных областях-ловушках.

В настоящей работе проведено численное моделирование методом Монте-Карло процесса переноса частицы в случайной среде фрактального типа с массовой размерностью $0 < d_M < 2$. Установлено, что распределение первого пробега характеризуется степенной асимптотикой с показателем α , который определяется как размерами и фрактальной размерностью среды, так и сечением взаимодействия частицы с элементарными неоднородностями. Показано, что соотношение $\alpha + 1 = 3 - d_M$ справедливо лишь в предельных случаях бесконечно протяженной среды или бесконечно малых сечений. Таким образом, учет зависимости сечения взаимодействия с неоднородностями от энергии и типа частицы, необходим для корректного описания процесса переноса в среде фрактального типа.

Результаты настоящей работы могут быть использованы для обобщения модели аномальной диффузии космических лучей в Галактике.

Благодарность

Авторы выражают глубокую признательность проф. В.В.Учайкину за многочисленные ценные обсуждения и замечания по поводу настоящей работы.

Список литературы

1. Лозинская Т. А. Сверхновые звезды и звездный ветер: взаимодействие с газом Галактики. М.: Наука, 1987.
2. Бочкарев Н.Г. Местная межзвездная среда. М.: Наука, 1990.
3. Falgarone E., Phillips T.G., Walker C.K. The edges of molecular clouds: Fractal boundaries and density structure//ApJ, 1991. 378. P.186-190.
4. Meish M.S. and Bally J. Statistical Analysis of Turbulence in Molecular Clouds//ApJ, 1994. 429. P.645-671.
5. Armstrong J.W., Rickett B.J., Spangler S.R. Electron Density Power Spectrum in the Local Interstellar Medium//ApJ, 1995. 443. P.209-221.
6. Minter A.H. and Spangler S.R. Observation of Turbulent Fluctuations in the Interstellar Plasma Density and Magnetic Field on Spatial Scales of 0.01 to 100 Parsecs//ApJ, 1996. 458. P.194-214.
7. Westpfahl D.J., Coleman P.H., Alexander J. and Tongue T. The Geometry of the H I of Several Members of the M81 Group: The H I is Fractal//AJ, 1999. 117. P.868-880.
8. Cadavid A.C., Lawrence J.K., Ruzmaikin A.A. Anomalous Diffusion of Magnetic Elements//ApJ, 1999. 521. P.844-850.
9. Chappell D., Scalo J. Multifractal Scaling, Geometrical Diversity, and Hierarchical Structure in the Cool Interstellar Medium//ApJ, 1999. 551. P.712-729.
10. Combes F. Astrophysical Fractals: Interstellar Medium and Galaxies. The Chaotic Universe//Proc. 2nd ICRA Network Workshop, Advanced Series in Astrophysics and Cosmology, Vol.10, 2000, p.143
11. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. Происхождение космических лучей. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
12. Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л. и др. Астрофизика космических лучей. 2-е изд./Под ред. Гинзбурга В.Л. М.: Наука, 1990.
13. Лагутин А.А., Никулин Ю.А., Учайкин В.В.//Препринт АГУ-2000/4, Барнаул, 2000.
14. Lagutin A.A., Nikulin Yu.A., Uchaikin V.V.// Nuclear Physics B (Proc.Suppl.), 2001, 97, p.267.
15. Lagutin A.A., Uchaikin V.V. Anomalous diffusion equation: application to cosmic ray transport//NIM B 201 (2003), p.212-216.
16. Учайкин В.В., Коробко Д. А., Гисмятов И. Ф. Модифицированные алгоритм Мандельброта моделирования распределения галактик в модели фрактального типа//Изв. вузов. Физика, N8, 1997. С.7-12.
17. Коробко Д. А. Моделирование многократного рассеяния в среде фрактального типа. – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Ульяновск, 1999. – 22 с.
18. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications, VSP, Utrecht, Netherlands, 1999.
19. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
20. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика//УФН, 1985, Т.146, Вып.3. С.493-506.
21. H. Isliker and L. Vlahos. Random walk through fractal environments//Phys. Rev. E 67, 026413 (2003). ArXiv:physics/0211113 v1.