УДК 537.591.15

А.А. Лагутин, А.Г. Тюменцев

Спектр, массовый состав и анизотропия космических лучей во фрактальной Галактике

Формулируется модель аномальной диффузии, в которой распространение космических лучей высокой энергии в галактической среде моделируется фрактальными блужданиями ("полеты Леви" + ловушки со случайным временем удержания, где частицы могут терять энергию и испытывать ядерные взаимодействия). Решение полученного уравнения диффузии с производными дробного порядка находится аналитическим и численным методами с использованием теории дробно-устойчивых распределений. Обоснование параметров модели проводится путем сопоставления теоретических результатов с данными экспериментов. Представлены результаты расчета энергетического спектра, массового состава и анизотропии космических лучей в Галактике в энергетическом диапазоне $E = (10^2 \div 10^{11})$ ГэВ, полученные в рамках данной модели. Показано, что главные особенности наблюдаемого в районе Земли спектра могут быть объяснены аномальным характером распространения космических лучей в межзвездной среде.

Введение

Проблема происхождения и ускорения космических лучей является предметом исследований в течение многих десятилетий. Ключевое место в решении этой проблемы занимает вопрос о характере распространения космических лучей в Галактике. В принятом сегодня подходе прохождение космических лучей в межзвездной среде описывают в рамках нормальной (гауссовой) диффузионной модели [1,2]. В этой модели неявно предполагается, что среда, в которой происходит диффузия частиц, является квазиоднородной: неоднородной в малых масштабах и однородной – в больших. Параметром процесса случайных блужданий частиц является коэффициент диффузии D, который определяется отношением второго момента распределения пробегов частицы между неоднородностями $\langle R^2\rangle$ к удвоенному среднему времени скачка $\langle T\rangle$:

$$D = \frac{\langle R^2\rangle}{2\langle T\rangle}. \tag{1}$$

Без учета потерь энергии и ядерных взаимодействий уравнение нормальной диффузии для концентрации космических лучей с энергией E, создаваемой распределением источников с плотностью $S(\mathbf{r}, t, E)$, имеет вид [1]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D(E)\Delta N(\mathbf{r}, t, E) + S(\mathbf{r}, t, E), \tag{2}$$

где Δ – оператор Лапласа. Функцией Грина этого уравнения является нормальное (гауссово) распределение по переменной $|\mathbf{r}| \big/ \sqrt{D(E)t}$.

Работа поддержана грантами программы "Университеты России" № 02.01.001 и РФФИ № 04–02–16724.

Эксперименты последних лет, однако, убедительно показывают, что неоднородности в пространственном распределении вещества и магнитного поля, обуславливающие хаотическое движение космических лучей, наблюдаются на разных масштабах (см., например, [2–9]). Так в [4] на основании детального анализа остатков ряда сверхновых делается вывод, что сосуществование в одном остатке сверхновой газовых компонент с сильно различающимися физическими параметрами ($T_e \sim (5\div10^6)K$, $n_e \sim (0,1\div10^3)$см$^{-3}$) может быть понято только в рамках предположения о неоднородности невозмущенной межзвездной среды с резкими контрастами плотности. В [10,11] сделаны оценки фрактальной размерности межзвездной галактической среды.

Нерегулярность распределения вещества и, в силу связи плотности ρ с магнитным полем $H \propto \rho^q$, $q \sim (1/2 \div 1/3)$ [5], магнитного поля Галактики по крайней мере в масштабах $l \leq (100 \div 150)$ пк и неприменимость, строго говоря, диффузионного приближения (2) для описания распространения частиц в средах с резкими контрастами плотности [12,13] (см. также обсуждение этого вопроса в [1]) стимулируют разработку новых моделей распространения космических лучей в межзвездной среде.

Среди возможных направлений обобщения модели (2) главным является отказ от предположения о статистически однородном распределении неоднородностей. Поскольку сегодня хорошо известно, что вследствие наличия турбулентных потоков распределение вещества и магнитного поля в Галактике имеет резко неоднородный характер фрактального типа, то естественно предположение о статистической однородности распределения неоднородностей заменить на более общее утверждение о фрактальном характере их распределения. Важным следствием этого предположения является степенное распределение пробегов частиц X в среде такого типа $P\{X > x\} \propto x^{-\alpha}$, $x \to \infty$, $\alpha < 1$ (так называемые "полеты Ле́ви"), показатель которого определяется фрактальностью среды. Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные позволяют предполагать, что "полеты Ле́ви" могут иметь важное значение, по крайней мере, в масштабах $r \leq 300$ пк [14].

Так как нельзя исключать и сильную запутанность силовых линий магнитного поля в неоднородностях, вследствие чего вероятность длительного пребывания частиц в них отлична от нуля, то наделение неоднородностей свойствами "ловушек" может быть следующим направлением обобщения модели. Если случайное время пребывания частиц T в "ловушках" описывается распределением $P\{T > t\} \sim t^{-\beta}$, $t \to \infty$, $\beta < 1$, то среднее время пребывания в таких ловушках, называемых нами далее "ловушками Ле́ви", равно бесконечности. Понятно, что нельзя исключать из рассмотрения неоднородности, среднее время пребывания космических лучей в которых конечно.

Переход от диффузии в однородной или квазиоднородной среде к диффузии в среде фрактального типа, характеризующейся наличием пустот и сгущений на разных масштабах, приводит к необходимости включения в модель распространения "полетов Ле́ви" и "ловушек Ле́ви". Сегодня установлено, что учет фрактальных свойств среды может быть осуществлен заменой операторов $\partial/\partial t$ и лапласиана Δ в уравнении нормальной диффузии операторами дробного дифференцирования по временной и пространственной переменным (см. обзоры [15–24]). Дробные операторы, отражающие наличие больших пробегов частиц в пустотах и длительное "застревание" частиц в неоднородностях–ловушках, делают процесс блуждания немарковским [23].

Именно такая модель фрактальных блужданий положена недавно в основу нового подхода к описанию распространения космических лучей в неоднородной галактической среде [25–32]. Поведение распределений свободных пробегов $p(\mathbf{r}, E)$ и времени пребывания в неоднородностях $q(t, E)$ частицы с кинетической энергией E при $r \to \infty$, $t \to \infty$ описывались выражениями

$$p(\mathbf{r}, E) \sim A(E, \alpha)|\mathbf{r}|^{-\alpha-1}, \qquad 0 < \alpha < 2, \tag{3}$$

$$q(t, E) \sim B(E, \beta)t^{-\beta-1}, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{4}$$

Первые расчеты показали, что укручение спектра всех частиц в районе $\sim 3 \cdot 10^6$ ГэВ ("излом") можно объяснить при $D \sim E^{\delta}$ и $S \sim E^{-\gamma}$(δ и γ – константы), если предположить только степенное распределение свободных пробегов частиц (3), т.е. если включить в модель диффузии "полеты Ле́ви".

В данной работе мы развиваем этот подход и формулируем основные результаты модели аномальной диффузии космических лучей для энергетического диапазона $10^2 \div 10^{11}$ ГэВ в рамках галактической картины происхождения первичного космического излучения.

1. Уравнение аномальной диффузии в модели случайных блужданий Монтролла–Вейса

Уравнение аномальной диффузии может быть легко получено в рамках модели случайных блужданий с непрерывным временем CTRW [33]. Этот подход использовался для формулировки и решения проблем в различных областях физики (см. последние обзоры [20, 21, 23, 24]. В модели CTRW считается, что частица, испущенная источником, совершает прыжки $R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots \in \mathrm{R}^m$ через случайные времена ожидания T_1, $T_1 + T_2$, …, $T_1 + T_2 + \ldots + T_j$, …, $T_i \in \mathrm{R}^1_+$. Случайные величины R_i и T_i независимы и их плотности распределений $p(x)$ и $q(t)$ не зависят от времени и координат соответственно. Трансформанта Фурье-Лапласа распределения частиц $p(x, t)$, $x \in R^m$, $t \in \mathrm{R}^1_+$,

$$p(k, \lambda) = \int\limits_{\mathrm{R}^m} dx \int\limits_0^{\infty} dt e^{ik\cdot x - \lambda t} p(x, t), \quad k \in \mathrm{R}^m$$

выражается через трансформанту Лапласа распределения времени ожидания,

$$q(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} q(t) dt,$$

и Фурье-трансформанту распределения пробегов

$$p(k) = \int\limits_{\mathrm{R}^m} e^{ik\cdot x} p(x) dx.$$

При изотропном блуждании $p(k)$ есть функция только $|\mathbf{k}|$. В [33] показано, что для частицы, стартовавшей в точке $x = 0$ в момент $t = 0$

$$p(k, \lambda) = \frac{1 - q(\lambda)}{\lambda\Big[1 - p(k)q(\lambda)\Big]}\ . \tag{5}$$

Понятно, что если

$$\int\limits_{\mathrm{R}^m} p(x)|x|^2 dx \equiv \langle R^2 \rangle \tag{6}$$

и

$$\int\limits_0^\infty q(t)tdt \equiv \langle T \rangle \tag{7}$$

конечны, то центральная предельная теорема и соотношение (5) должны приводить к уравнению нормальной диффузии.

Действительно, в пределе $r \to \infty$, $t \to \infty$, что эквивалентно $k \to 0$, $\lambda \to 0$ в соответствии с тауберовой теоремой [34], имеем

$$p(k) \propto 1 - \langle R^2/2 \rangle |k|^2, \quad k \to 0, \tag{8}$$

$$q(\lambda) \propto 1 - \langle T \rangle \lambda, \quad \lambda \to 0 \tag{9}$$

и, при $D = \langle R^2 \rangle / (2 \langle T \rangle)$,

$$p(k, \lambda) \propto p^{as}(k, \lambda) = \frac{1}{\lambda + Dk^2}. \tag{10}$$

После выполнения обратного преобразования Фурье-Лапласа получаем, как решение задачи, распределение Гаусса

$$p^{as}(x, t) = (4\pi Dt)^{-m/2} \exp\{-x^2/(4Dt)\}. \tag{11}$$

Преобразования равенства

$$\lambda p^{as}(k, \lambda) = -Dk^2 p^{as}(k, \lambda) + 1,$$

полученного из (10), приводят к уравнению нормальной диффузии:

$$\frac{\partial p^{as}(x, t)}{\partial t} = D\Delta p^{as}(x, t) + \delta(x)\delta(t). \tag{12}$$

В (12) $\delta(x)$ и $\delta(t)$ обозначают m-мерную и одномерную дельта–функции Дирака соответственно.

Если величины (6) и (7) бесконечны, но при $r \to \infty$ и $t \to \infty$ выполняются соотношения

$$\int\limits_{|x|>r} p(x)dx \propto Ar^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{13}$$

$$\int\limits_t^\infty q(\tau)d\tau \propto Bt^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{14}$$

то, как известно, мы приходим к режиму аномальной диффузии (см. недавний обзор [23]).

При условиях (13)–(14) равенства (8)–(9) неверны. В соответствии с тауберовой теоремой асимптотические выражения (13)–(14) обеспечиваются следующими трансформантами $p(k)$ и $q(\lambda)$ [35]:

$$1 - p(k) \sim A'|k|^\alpha, \quad k \to 0, \tag{15}$$

$$1 - q(\lambda) \sim B'\lambda^\beta, \quad \lambda \to 0. \tag{16}$$

Здесь

$$A' = 2^{-\alpha} A \frac{\Gamma(m/2)\Gamma(1-\alpha/2)}{\Gamma\Big((\alpha+m)/2\Big)}, \tag{17}$$

$$B' = \Gamma(1-\beta)B. \tag{18}$$

Подставляя выражения (15)–(16) в (5), получаем

$$p^{as}(k, \lambda) = \frac{\lambda^{\beta-1}}{\lambda^\beta + D_A|k|^\alpha}, \tag{19}$$

где

$$D_A = A'/B'. \tag{20}$$

Записывая (19) в виде

$$\lambda^\beta p^{as}(k, \lambda) = -D_A|k|^\alpha p^{as}(x, t) + \lambda^{\beta-1}$$

и выполняя обратное преобразование Фурье-Лапласа, с использованием законов преобразования оператора Рисса $(-\Delta)^{\alpha/2}$ [36],

$$\int\limits_{\mathrm{R}^m} e^{ikx}(-\Delta)^{\alpha/2} f(x)\, dx = |k|^\nu f(k), \tag{21}$$

и дробной производной Римана–Лиувилля D^β_{0+} [36],

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} D^\beta_{0+} f(t)dt = \lambda^\beta f(\lambda), \tag{22}$$

мы получаем уравнение аномальной диффузии в дробных производных [23, 24, 35]

$$D^\beta_{0+} p^{as}(x, t) = -D_A(-\Delta)^{\alpha/2} p^{as}(x, t) + \\ + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\delta(x). \tag{23}$$

Выполняя дробное дифференцирование порядка $1-\beta$ обеих частей уравнения (23), окончательно приходим к уравнению

$$\frac{\partial p^{as}(x, t)}{\partial t} = -D_A D^{1-\beta}_{0+}(-\Delta)^{\alpha/2} p^{as}(x, t) + \\ + \delta(x)\delta(t). \tag{24}$$

2. Уравнение аномальной диффузии в модели Учайкина

Другой подход к описанию аномальной диффузии частиц был недавно предложен Учайкиным [37]. В подходе [37] блуждание частицы также представляет собой последовательную смену двух состояний: состояния покоя, обозначаемого далее индексом (0), и состояния диффузии — (1). Времена пребывания частицы в этих состояниях считаются независимыми случайными величинами, распределения которых описываются плотностями $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$. Предполагается также, что среднее время T_1 между выходом частицы из "ловушки Леви" и последующим попаданием в другую такую ловушку конечно, т.е.

$$T_1 = \int_0^\infty \tau q_1(\tau) d\tau < \infty. \quad (25)$$

В данной работе, в отличие от [37], считается, что диффузия частицы между "ловушками Леви"(состояние (1)) описывается плотностью вероятности $p(x,t)$, трансформанта Фурье которой при $k \to 0$ имеет вид

$$p(k,t) \sim \exp\left(-Dk^\alpha t\right). \quad (26)$$

Параметр D является коэффициентом диффузии частицы между "ловушками Леви". Возможность такого режима диффузии между ловушками допускалась в [37].

Можно показать, что условие (26) описывает режим диффузии между "ловушками Леви", когда частица, совершая "полеты Леви", пребывает конечное время в неоднородностях, не входящих в класс "ловушек Леви".

В [37] показано, что пространственное распределение $\rho_0(x,t)$ частицы в момент t, начавшей свою историю в момент $t=0$ с попадания в ловушку в точке $x=0$, связано с пространственным распределением $\rho_1(x,t)$ частицы, начавшей свою историю с выхода из ловушки в точке $x=0$, системой интегральных уравнений

$$\rho_0(x,t) = Q_0(t)\delta(x) + \int_0^t d\tau q_0(\tau)\rho_1(x,t-\tau), \quad (27)$$

$$\rho_1(x,t) = Q_1(t)p(x,t) + \\ + \int_0^t d\tau q_1(\tau) p(x,\tau) * \rho_0(x,t-\tau). \quad (28)$$

В этих уравнениях символ $(*)$ означает операцию свертки по пространственным переменным,

$$p(x,\tau) * \rho_0(x,t-\tau) \equiv \int p(x',\tau) \times \\ \times \rho_0(x-x',t-\tau) d^m x',$$

а

$$Q_i(t) = \int_t^\infty q_i(\tau) d\tau.$$

Применяя к (27)–(28) преобразование Фурье–Лапласа по координатам и времени, получаем:

$$\rho_0(k,\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \int e^{-ikx} \times \\ \times \left[Q_0(t)\delta(x) + \int_0^t d\tau q_0(\tau)\rho_1(x,t-\tau)\right] d^m x = \\ = Q_0(\lambda) + q_0(\lambda)\rho_1(k,\lambda),$$

$$\rho_1(k,\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} Q_1(t) p(k,t) + \\ + \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \int_0^t d\tau q_1(\tau) p(k,\tau) * \rho_0(k,t-\tau) = \\ = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} e^{-Dk^\alpha t} Q_1(t) + \\ + \rho_0(k,\lambda) \int_0^\infty d\tau q_1(\tau) e^{-(\lambda + Dk^\alpha)\tau} = \\ = Q_1(\lambda + Dk^\alpha) + \rho_0(k,\lambda) q_1(\lambda + Dk^\alpha).$$

Эта система уравнений имеет следующее решение:

$$\rho_0(k,\lambda) = \frac{Q_0(\lambda) + q_0(\lambda) Q_1(\lambda + Dk^\alpha)}{1 - q_0(\lambda) q_1(\lambda + Dk^\alpha)},$$

$$\rho_1(k,\lambda) = \frac{Q_1(\lambda + Dk^\alpha) + q_1(\lambda + Dk^\alpha) Q_0(\lambda)}{1 - q_0(\lambda) q_1(\lambda + Dk^\alpha)}.$$

В пределе $k \to 0$, $\lambda \to 0$, когда выполняются соотношения

$$1 - q_0(\lambda) \sim B'\lambda^\beta,$$
$$1 - q_1(\lambda) \sim T_1\lambda,$$
$$Q_0(\lambda) = \frac{1 - q_0(\lambda)}{\lambda},$$
$$Q_1(\lambda) = \frac{1 - q_1(\lambda)}{\lambda} \sim T_1,$$

находим

$$\rho^{as}(k,\lambda) = \frac{B'\lambda^{\beta-1} + (1 - B'\lambda^\beta) T_1}{1 - (1 - B'\lambda^\beta)(1 - T_1(\lambda + Dk^\alpha))} \approx \\ \approx \frac{\lambda^{\beta-1}}{D_A k^\alpha + \lambda^\beta}, \quad (29)$$

где $D_A = DT_1/B'$.

Обратное преобразование Фурье–Лапласа выражения (29), совпадающего с (19), снова приводит к уравнению аномальной диффузии (24).

Новым элементом кинетики аномальной диффузии, полученным в изложенном выше выводе, является утверждение о том, что при диффузии частицы в среде с "ловушками Ле́ви" включение дополнительного изотропного рассеяния на неоднородностях, не входящих в класс "ловушек Ле́ви", с "полетами Ле́ви" между ними не влияет на пространственное положение диффундирующей частицы при $x \to \infty$, $t \to \infty$.

3. Функция Грина уравнения аномальной диффузии космических лучей

Применим, теперь, рассмотренный выше скачкообразный случайный процесс, включающий "полеты Ле́ви" и пребывание в "ловушках Ле́ви", для описания диффузии космических лучей в галактической среде фрактального типа. Будем считать, что распределения свободных пробегов $p(\mathbf{r}, R)$ и времени пребывания в неоднородностях $q(t, R)$ частицы с импульсом p и зарядом Z при $r \to \infty$, $t \to \infty$ описываются выражениями

$$p(\mathbf{r}, R) \sim A(R, \alpha)|\mathbf{r}|^{-\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (30)$$

$$q(t, R) \sim B(R, \beta)t^{-\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1, \qquad (31)$$

где $R = pc/Z$ – жесткость частицы. При $E \gg mc^2$ имеем $R \approx (E/Z)$. Будем также пренебрегать потерями энергии и ядерными взаимодействиями частиц.

Повторяя выкладки предыдущего раздела при условиях (30)–(31), приходим к следующему уравнению для функции Грина:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -D(R, \alpha, \beta)\mathrm{D}_{0+}^{1-\beta}(-\Delta)^{\alpha/2}\times \\ \times G(\mathbf{r}, t, R; R_0) + \delta(\mathbf{r})\delta(t)\delta(R - R_0). \qquad (32)$$

Коэффициент аномальной диффузии $D(R, \alpha, \beta)$ определяется константами $A(R, \alpha)$ и $B(R, \beta)$ распределений (30)–(31):

$$D(R, \alpha, \beta) \sim A(R, \alpha)/B(R, \beta).$$

Полагая $A \sim R^{\delta_L}$, $B \sim R^{-\delta_T}$ и обозначая $\delta = \delta_L + \delta_T$, будем записывать коэффициент диффузии в виде

$$D(R, \alpha, \beta) = \frac{v}{c}D_0(\alpha, \beta)\left(R/1\text{ГэВ}\right)^{\delta}, \qquad (33)$$

где v — скорость частицы. Отметим, что далее в промежуточных расчетах, для упрощения записи, будем вместо $(R/1\text{ГэВ})$ писать R.

Решение (32) находим с использованием преобразований Фурье–Лапласа:

$$\int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{i\mathbf{kr}}G(\mathbf{r}, t, R; R_0)\,d\mathbf{r} = \tilde{G}(\mathbf{k}, t, R; R_0),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}G(\mathbf{r}, t, R; R_0)\,dt = \tilde{G}(\mathbf{r}, \lambda, R; R_0).$$

С учетом (21)–(22), из (32) для трансформанты $\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda, R; R_0)$ имеем

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda, R; R_0) = \frac{\lambda^{\beta-1}\delta(R - R_0)}{\lambda^\beta + D|k|^\alpha} = \\ = \frac{\delta(R - R_0)}{\lambda^{1-\beta}}\int\limits_0^\infty \exp\{-[\lambda^\beta + D|k|^\alpha]y\}dy. \qquad (34)$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа выражения (34)

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda, R; R_0) = \delta(R - R_0)\times \\ \times \int\limits_0^\infty dy\exp\{-D|k|^\alpha y\}\times \\ \times\left[(2\pi i)^{-1}\int\limits_L d\lambda\lambda^{\beta-1}\exp\{\lambda t - \lambda^\beta y\}\right],$$

с использованием равенства

$$\int\limits_L d\lambda\lambda^{\beta-1}\exp\{\lambda t - \lambda^\beta y\} = \\ = -(\beta y)^{-1}\int\limits_L \exp\{\lambda t\}d\exp\{-\lambda^\beta y\} = \\ = -t\,(\beta y)^{-1}\int\limits_L d\lambda\exp\{\lambda t - \lambda^\beta y\},$$

полученного интегрированием по частям, и замены переменной $s = y^{1/\beta}\lambda$, находим

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, t, R; R_0) = \delta(R - R_0)\beta^{-1}t\times \\ \times\int\limits_0^\infty dy\exp\{-D|k|^\alpha y\}y^{-1-1/\beta}\times \\ \times\left[2\pi i^{-1}\int\limits_S ds\exp\{sy^{-1/\beta}t - s^\beta\}\right]. \qquad (35)$$

Поскольку в квадратных скобках стоит одностороннее устойчивое распределение

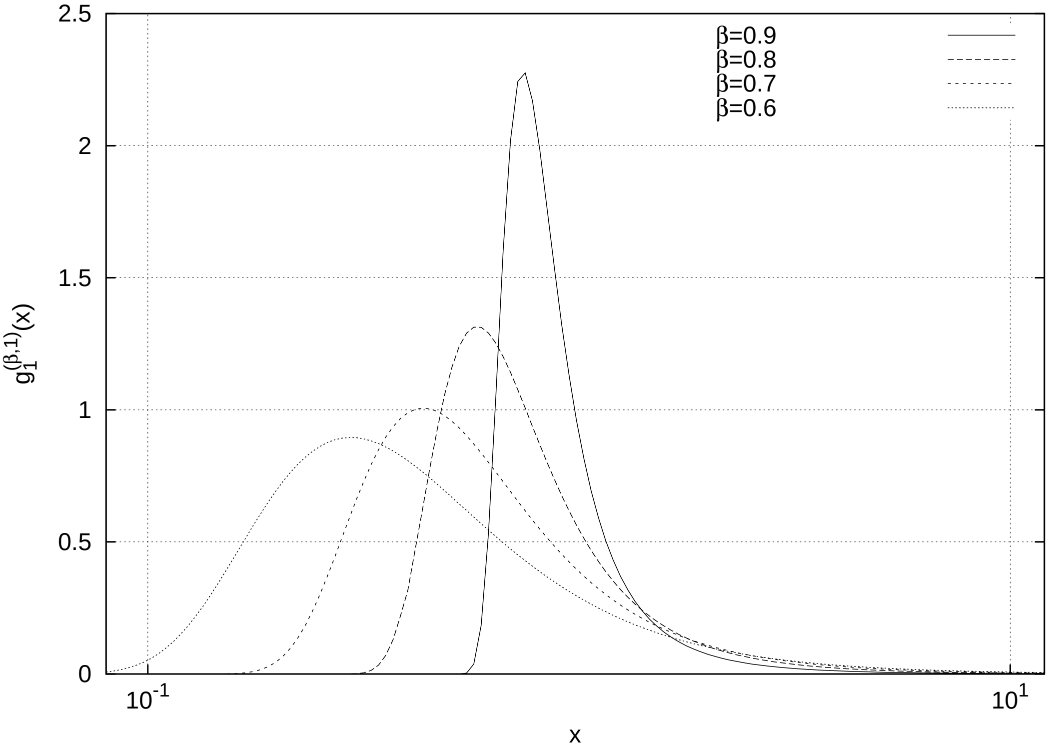

Рис. 1. Плотность вероятности одностороннего одномерного устойчивого распределения при различных значениях характеристического показателя β

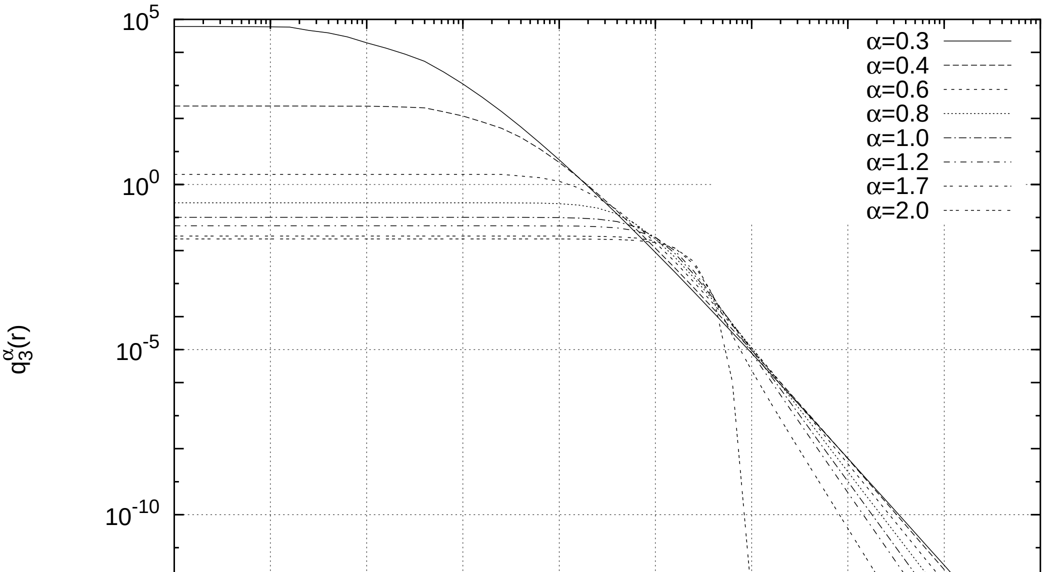

Рис. 2. Зависимость плотности вероятности трехмерного сферически-симметричного устойчивого распределения от радиальной переменной при различных значениях характеристического показателя α

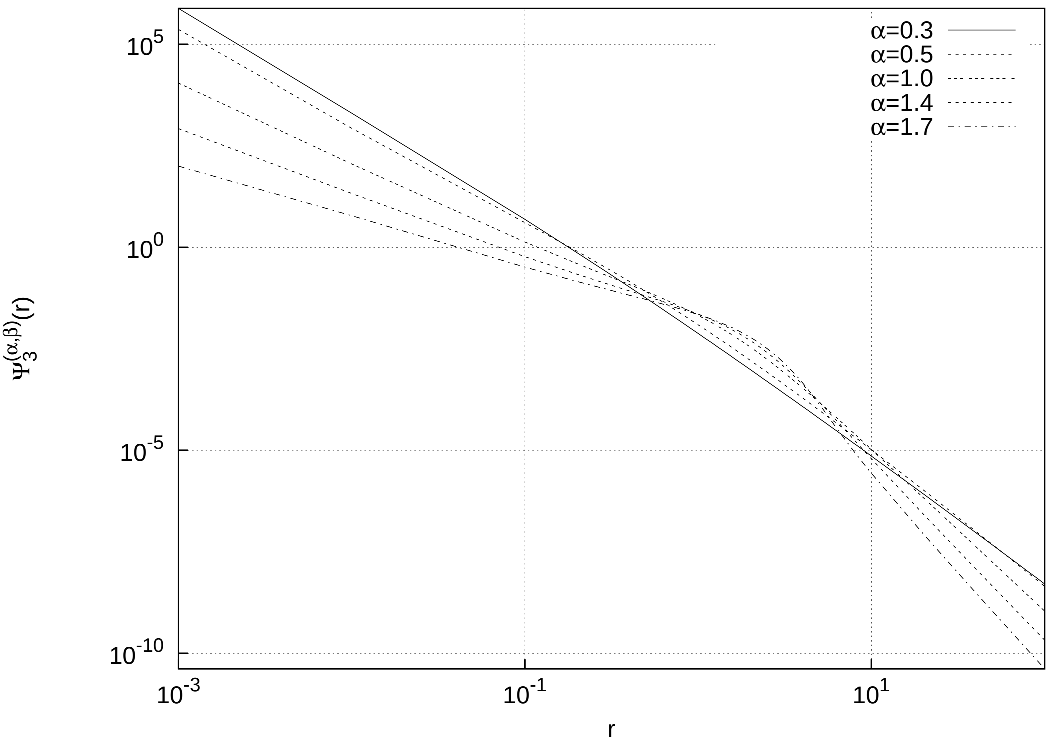

Рис. 3. Плотность дробно–устойчивого распределения $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ при различных значениях характеристического показателя α и $\beta = 0,8$

$g_1^{\beta,1}\left(ty^{-1/\beta}\right)$ [38], то (35) можно представить в виде

$$\tilde{G}(\mathbf{k},t,R;R_0) = \delta(R-R_0)\int\limits_0^\infty d\tau g_1^{(\beta,1)}(\tau) \times \\ \times \exp\{-D|k|^\alpha t^\beta/\tau^\beta\}.$$

Принимая во внимание, что $\exp\{-k^\alpha\}$ есть трансформанта Фурье сферически–симметричного устойчивого распределения $g_3^{(\alpha)}(r)$ [20], окончательно получаем

$$G(\mathbf{r},t,R;R_0) = \delta(R-R_0)\left(Dt^\beta\right)^{-3/\alpha} \times \\ \times \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(|\mathbf{r}|\left(Dt^\beta\right)^{-1/\alpha}). \quad (36)$$

Здесь

$$\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r) = \int\limits_0^\infty g_3^{(\alpha)}\left(r\tau^{\beta/\alpha}\right) g_1^{(\beta,1)}(\tau)\,\tau^{3\beta/\alpha}\,d\tau \quad (37)$$

есть плотность дробно–устойчивого распределения [23], определяемая трехмерным сферически–симметричным устойчивым распределением $g_3^{(\alpha)}(r)$ ($\alpha \le 2$) и одномерным односторонним устойчивым распределением $g_1^{(\beta,1)}(t)$ с характеристическим параметром $\beta \le 1$. Основные особенности этого класса распределений, введенного недавно Учайкиным и Королевым, подробно описаны в [23].

Следует отметить, что плотности $g_1^{(\beta,1)}(t)$ и $g_3^{(\alpha)}(r)$ выражаются через элементарные функции в очень небольшом числе случаев (см. [20, 23]). Так при $\beta = 1/2$ односторонняя плотность

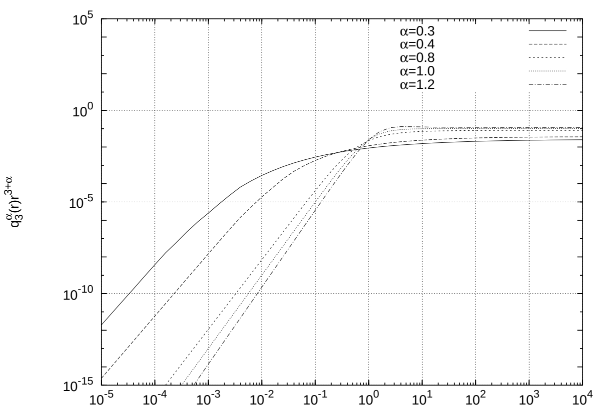

Рис. 4. Асимптотика $r^{-3-\alpha}$ плотности вероятности трехмерного сферически-симметричного устойчивого распределения при $r \to \infty$

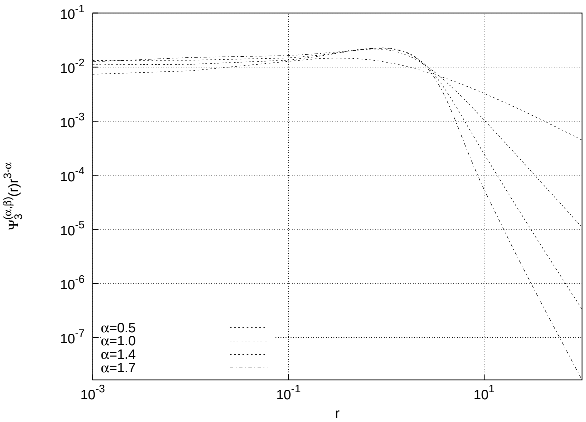

Рис. 5. Асимптотика $\sim r^{-3+\alpha}$ плотности дробно–устойчивого распределения $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ при $r \to 0$ при различных значениях характеристического показателя α и $\beta = 0,8$

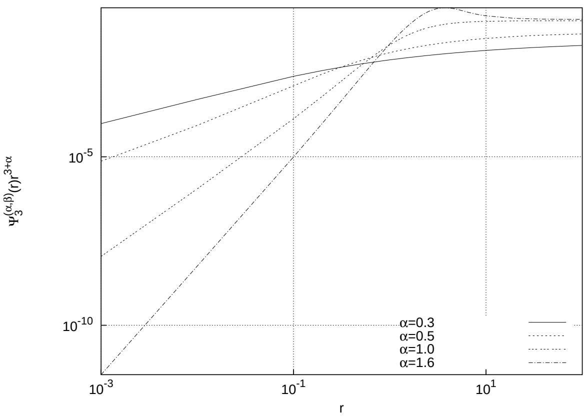

Рис. 6. Асимптотика $\sim r^{-3-\alpha}$ плотности дробно–устойчивого распределения $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ при $r \to \infty$ при различных значениях характеристического показателя α и $\beta = 0,8$

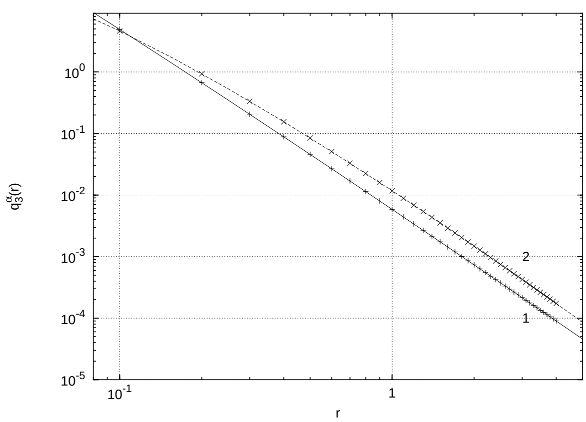

Рис. 7. Сопоставление плотностей вероятности трехмерных сферически–симметричных устойчивых распределений, полученных в данной работе (линии), с результатами [20](символы $\times, +$). 1 — $\alpha = 0,2$; 2 — $\alpha = 0,4$

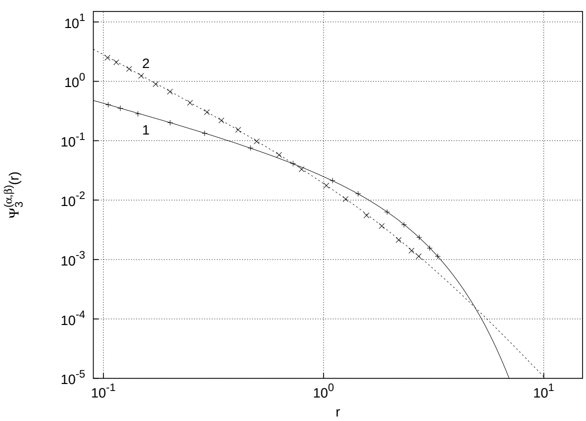

Рис. 8. Сопоставление дробно–устойчивых распределений $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$, полученных в данной работе (линии), с результатами [24] (символы $\times, +$). 1 — $\alpha = 2, \beta = 0,5$; 2 — $\alpha = 1, \beta = 0,5$

есть распределение Леви–Смирнова,

$$g_1^{(1/2,1)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp -1/(4t),$$

а при $\beta = 1$ — дельта–функция Дирака:

$$g_1^{(1,1)}(t) = \delta(t-1). \tag{38}$$

Трехмерное сферически–симметричное распределение $g_3^{(2)}(r)$ есть нормальное (гауссово) распределение, а $g_3^{(1)}(r) = \left[\pi(1+r^2)\right]^{-2}$ — распределение Коши. При $\beta = 1$, как видно из (37) и (38), справедливо равенство

$$\Psi_3^{(\alpha,1)}(r) = g_3^{(\alpha)}(r).$$

Понятно, что отсутствие представлений устойчивых распределений в классе элементарных функций затрудняют их использование при решении физических задач. Вместе с тем, имеющиеся выражения для устойчивых распределений в виде сходящихся и асимптотических рядов и интегралов [20, 38] позволяют вычислять $g_1^{(\beta,1)}(t)$, $g_3^{(\alpha)}(r)$ в случаях, отличных от представленных выше. Примеры поведения $g_1^{(\beta,1)}(t)$, $g_3^{(\alpha)}(r)$ и $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ при некоторых значениях характеристических показателей α, β показаны на рис. 1–6. Сопоставление результатов наших расчетов с данными [20,24] демонстрируют рис. 7,8.

4. Решение уравнения аномальной диффузии космических лучей

В случае источников, описываемых плотностью $S(\mathbf{r}, t, R)$, из (32) получаем обобщённое уравнение аномальной диффузии для концентрации космических лучей вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -D(R,\alpha,\beta)\mathrm{D}_{0+}^{1-\beta}(-\Delta)^{\alpha/2}N(\mathbf{r},t,R) + S(\mathbf{r},t,R). \quad (39)$$

При $\alpha = 2$, $\beta = 1$ это уравнение совпадает с уравнением нормальной диффузии (2). При $\alpha < 2$, $\beta = 1$ получаем уравнение супердиффузии космических лучей

$$\frac{\partial N(\mathbf{r},t,R)}{\partial t} = -D(R,\alpha)(-\Delta)^{\alpha/2}N + S(\mathbf{r},t,R),$$

которое впервые исследовалось в [25,26]. Анализ решения этого уравнения при степенном спектре генерации частиц позволил установить, что в этой модели спектр космических лучей имеет излом.

При $\alpha = 2$, $\beta < 1$ из (39) получаем уравнение, описывающее субдиффузионный режим

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D(R,\beta)\mathrm{D}_{0+}^{1-\beta}\Delta N(\mathbf{r},t,R) + S(\mathbf{r},t,R).$$

Этот режим распространения космических лучей, как промежуточная асимптотика, впервые обсуждался в [39].

Функция Грина (36) позволяет найти решения уравнения аномальной диффузии (39) для источников, представляющих интерес с астрофизической точки зрения.

В случае точечного мгновенного источника со степенным по жесткости спектром инжекции частиц

$$S(\mathbf{r},t,R) = S_M R^{-\gamma}\delta(\mathbf{r})\delta(t),$$

часто используемого в оценках потоков космических лучей, имеем

$$N(\mathbf{r},t,R) = S_M R^{-\gamma}\left(D(R,\alpha,\beta)t^{\beta}\right)^{-3/\alpha}\times \Psi_3^{(\alpha,\beta)}\left(r\left(D(R,\alpha,\beta)t^{\beta}\right)^{-1/\alpha}\right). \quad (40)$$

Для точечного импульсного источника

$$S(\mathbf{r},t,R) = S_И R^{-\gamma}\delta(\mathbf{r})H(T-t)H(t),$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

моделирующего спектр частиц, ускоренных в астрофизических объектах, решение имеет вид

$$N(\mathbf{r},t,R) = \frac{S_И R^{-\gamma}}{D(R,\alpha,\beta)^{3/\alpha}}\int\limits_{\max[0,t-T]}^{t} d\tau\tau^{-3\beta/\alpha}\times \Psi_3^{(\alpha,\beta)}\left(|\mathbf{r}|\left(D(R,\alpha,\beta)\tau^{\beta}\right)^{-1/\alpha}\right). \quad (41)$$

5. Оценка параметров модели аномальной диффузии

В наших предыдущих работах [25–30, 32] было показано, что в модели аномальной диффузии энергетический спектр космических лучей имеет излом. Эта особенность полученного решения, которую легко увидеть из анализа зависимости концентрации частиц $N(\mathbf{r}, t, E)$ от энергии, позволяет определить ряд параметров модели.

Поскольку плотность дробно–устойчивого распределения $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ ($\alpha < 2, \beta < 1$) при $r \to 0$ и $r \to \infty$ имеет, как видно из рис 5, 6, асимптотику степенного вида,

$$\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r) \propto r^{-(3-\alpha)}, \quad r \to 0,$$

$$\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r) \propto r^{-3-\alpha}, \quad r \to \infty,$$

из (40), при условии (33), для показателя η энергетического спектра $N = N_0E^{-\eta}$ получаем

$$\eta = \gamma - \delta, \quad E \ll E_k, \quad (42)$$

$$\eta = \gamma + \delta, \quad E \gg E_k. \quad (43)$$

Здесь E_k — энергия, при которой показатель спектра наблюдаемых частиц $\eta(E_k)$ равен показателю спектра генерации γ частиц в источнике. Из этих равенств следует, что с ростом энергии происходит укручение спектра на $\Delta\eta = 2\delta$.

Если считать, что E_k соответствует энергии излома наблюдаемого спектра, т.е. $E_k \approx 3\cdot 10^6$ ГэВ, то соотношения (42), (43) позволяют по экспериментальным данным о поведении спектра при $E \ll E_k$ и $E \gg E_k$ найти показатель γ спектра частиц в источнике и показатель δ зависимости коэффициента аномальной диффузии от энергии. Полагая в соответствии с [40], что $\eta_{E\ll E_k} = 2,62 \pm 0,12$, $\eta_{E\gg E_k} = 3,16 \pm 0,08$, $\Delta\eta = 0,54$, находим

$$\gamma = 2,89 \pm 0,14, \quad \delta = 0,27.$$

Если использовать значение показателя спектра ядер железа при $E \ll E_k$, равный 2,59 [41], то при $\delta = 0,27$ для показателя спектра инжекции частиц в источнике получаем $p \approx 2,86$. Учитывая эти оценки, в данной работе принимается, что

$$\gamma = 2,85, \quad \delta = 0,27. \tag{44}$$

Важными параметрами модели являются показатели α, β распределений свободных пробегов частицы (30) и времени пребывания в неоднородностях (31). Основываясь на результатах работ [42, 43], в которых показано, что для сред с фрактальной размерностью $1 < D_F < 2$

$$\alpha \approx 2 - D_F,$$

для галактической среды с $D_F = 1,7$ [11] находим $\alpha = 0,3$. Показатель β полагаем, как и в [30], равным $0,8$.

Еще один важный параметр модели — коэффициент аномальной диффузии D_0 — можно оценить, сопоставив точку излома наблюдаемого спектра космических лучей с точкой "излома" дробно–устойчивых распределений $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$. Поскольку излом $\Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r)$ наблюдается при $r \approx 2,3$, получаем

$$r(D_0 E_k^{\delta} t^{\beta})^{-1/\alpha} \approx 2,3. \tag{45}$$

Считая, что в формировании излома в энергетическом спектре участвуют и близкие источники, при $r \approx 10^2$ пк, $t \approx 10^5$ лет находим

$$D_0 \approx (3 \div 5) \cdot 10^{-6} (\text{пк}^{0,3}/\text{год}^{0,8}). \tag{46}$$

При таком D_0 и установленных выше параметрах δ, α, β существует однозначная связь между r и t источников, обеспечивающих наблюдаемый излом спектра при $E_k \approx 3 \cdot 10^6$ ГэВ (см. рис. 9).

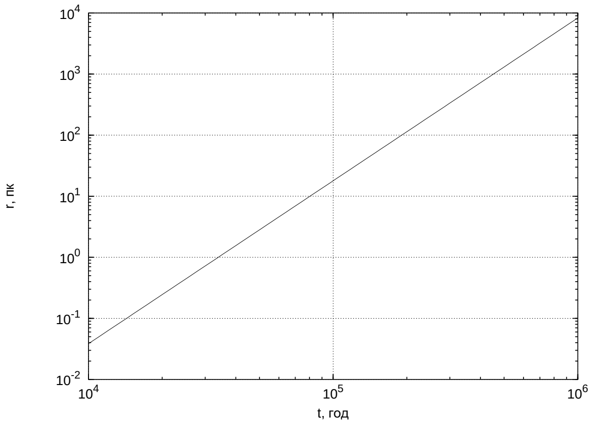

Рис. 9. Параметры r и t для источников, имеющих в представленной модели излом наблюдаемого спектра при $E_k \approx 3 \cdot 10^6$ ГэВ

6. Энергетический спектр и массовый состав космических лучей

Физические аргументы [1,2] и расчеты показывают, что основной вклад в наблюдаемый поток космических лучей в области энергий $1 \div 10$ ГэВ дают многочисленные далекие ($r \geq 1$ кпк) старые ($t \geq 10^6$ лет) источники. Оценку вклада этих источников принято проводить в стационарном приближении [2].

Выполненные ранее расчеты [47] показали, что в среде фрактального типа спектр частиц от стационарного источника имеет степенной вид, причем показатель спектра $\eta \approx \gamma + \frac{\delta}{\beta}$. Учитывая этот результат, в данной работе интенсивность частиц типа i от всех далеких источников представляется в виде

$$J_G^i(r > 1\text{кпк}) = \frac{v_i}{c} \text{C}_{0i} E^{-p-\delta/\beta}. \tag{47}$$

Согласованное описание основных закономерностей спектров основных групп ядер и спектра всех частиц, как показали расчеты [27,32], может быть получено в рамках гипотезы об определяющем вкладе близких ($r \leq 1$ кпк) относительно молодых ($t < 10^6$ лет) источников в поведение спектра в области высоких энергий $E \geq 10^3$ ГэВ и формирование излома. Вклад близких источников в интенсивность частиц типа i будем записывать в виде

$$J_L^i(r < 1\text{кпк}) = \frac{v_i}{4\pi} \sum_{\substack{j \\ (r \leq 1\text{кпк})}} N(\vec{r_j}, t_j, E). \tag{48}$$

Пространственно–временные координаты учитываемых в расчетах ближайших источников, рассматриваемых в работе как импульсные источники с $T \sim 10^4$ лет, приведены в [48].

Следует отметить, что важная роль близких источников в формировании спектров космических лучей отмечалась в работах [49, 50].

Деление потока наблюдаемых частиц на две диффузионные компоненты с различными свойствами часто используется при расчете спектров космических лучей. Однако, наличие больших свободных пробегов частиц ("полеты Лéви") в модели аномальной диффузии приводит к необходимости ввести третью компоненту. Эта компонента формируется частицами от близких источников, которые достигают Солнечную систему без рассеяния. Интенсивность нерассеянного излучения определяется спектром инжекции частиц в источнике ($\sim S_0 E^{-\gamma}$) и вероятностью "полета Лéви" $p(E, > r)$. Принимая во внимание, что

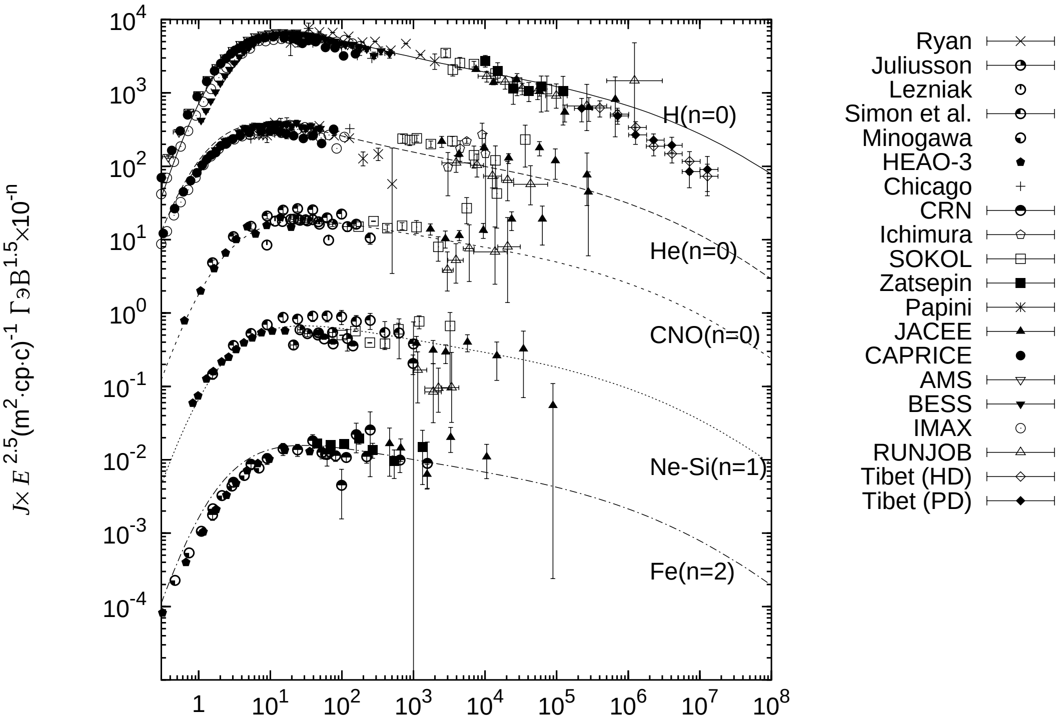

Рис. 10. Сопоставление спектров ядер, полученных в модели аномальной диффузии, с экспериментальными данными из [32]

Таблица 1

Массовый состав космических лучей в модели аномальной диффузии

E, ГэВ/част.	H	He	CNO	Ne-Si	Fe	$\langle lnA\rangle$	$\langle A\rangle$
10^2	0.50	0.31	0.11	0.06	0.02	0.99	5.77
$3\cdot10^2$	0.41	0.28	0.15	0.11	0.06	1.34	9.27
10^3	0.36	0.26	0.16	0.13	0.09	1.56	11.71
$3\cdot10^3$	0.34	0.25	0.17	0.14	0.10	1.65	12.88
10^4	0.33	0.25	0.17	0.14	0.11	1.69	13.36
$3\cdot10^4$	0.32	0.24	0.17	0.15	0.11	1.71	13.58
10^5	0.32	0.24	0.17	0.15	0.12	1.74	13.80
$3\cdot10^5$	0.31	0.24	0.18	0.15	0.12	1.78	14.21
10^6	0.29	0.24	0.19	0.16	0.13	1.85	14.90
$3\cdot10^6$	0.27	0.23	0.19	0.17	0.14	1.93	15.86
10^7	0.24	0.22	0.20	0.18	0.16	2.04	17.07
$3\cdot10^7$	0.21	0.21	0.21	0.20	0.18	2.17	18.58
10^8	0.19	0.19	0.21	0.21	0.20	2.30	20.26
$3\cdot10^8$	0.16	0.17	0.21	0.22	0.23	2.43	21.97
10^9	0.15	0.16	0.21	0.23	0.25	2.50	23.14
$3\cdot10^9$	0.15	0.16	0.21	0.23	0.26	2.53	23.62
10^{10}	0.17	0.16	0.20	0.22	0.25	2.45	22.90
$3\cdot10^{10}$	0.32	0.16	0.16	0.17	0.19	1.94	17.89
10^{11}	0.41	0.16	0.14	0.14	0.15	1.64	14.85

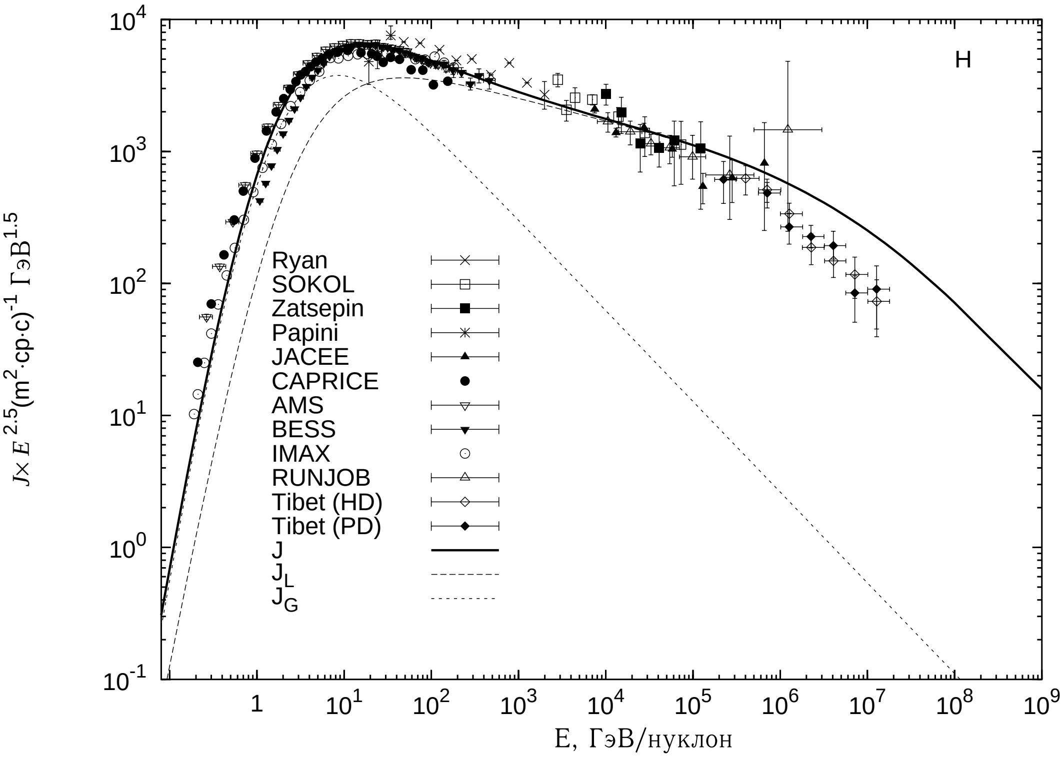

Рис. 11. Вклад далеких J_G и близких J_L источников в наблюдаемый спектр протонов J. Экспериментальные данные — из [32]

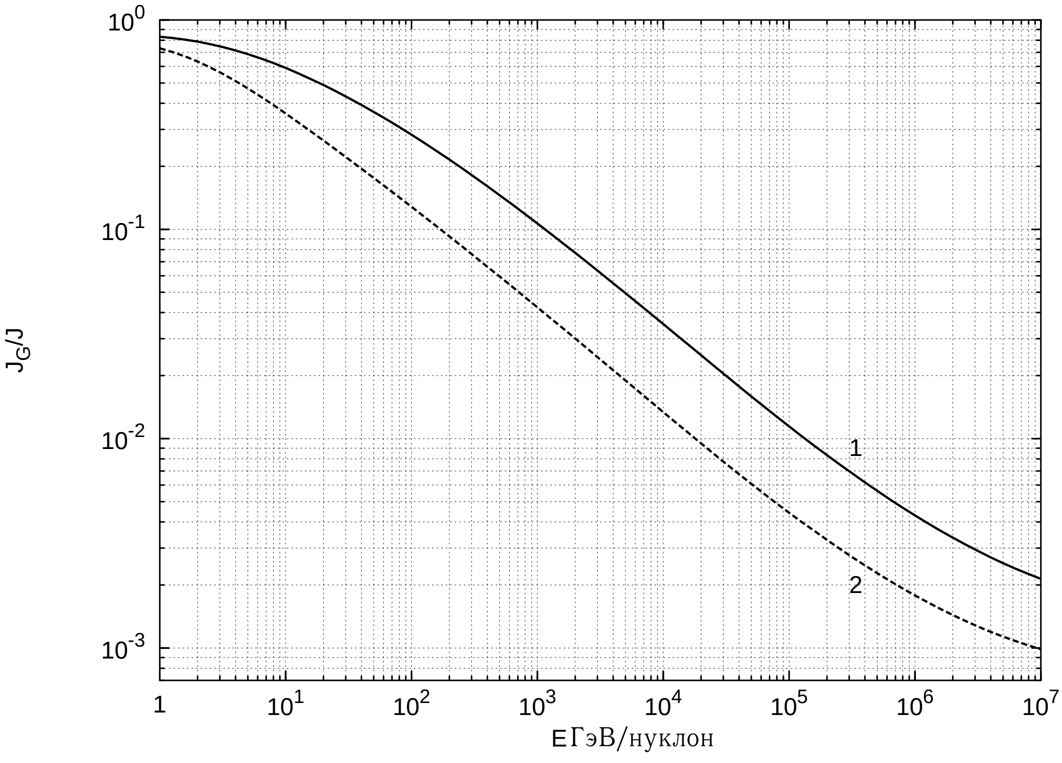

Рис. 12. Относительный вклад далеких ($r \geq 1$ кпк, $t \geq 10^6$ лет) источников J_G^i в наблюдаемый спектр протонов (1) и ядер гелия (2)

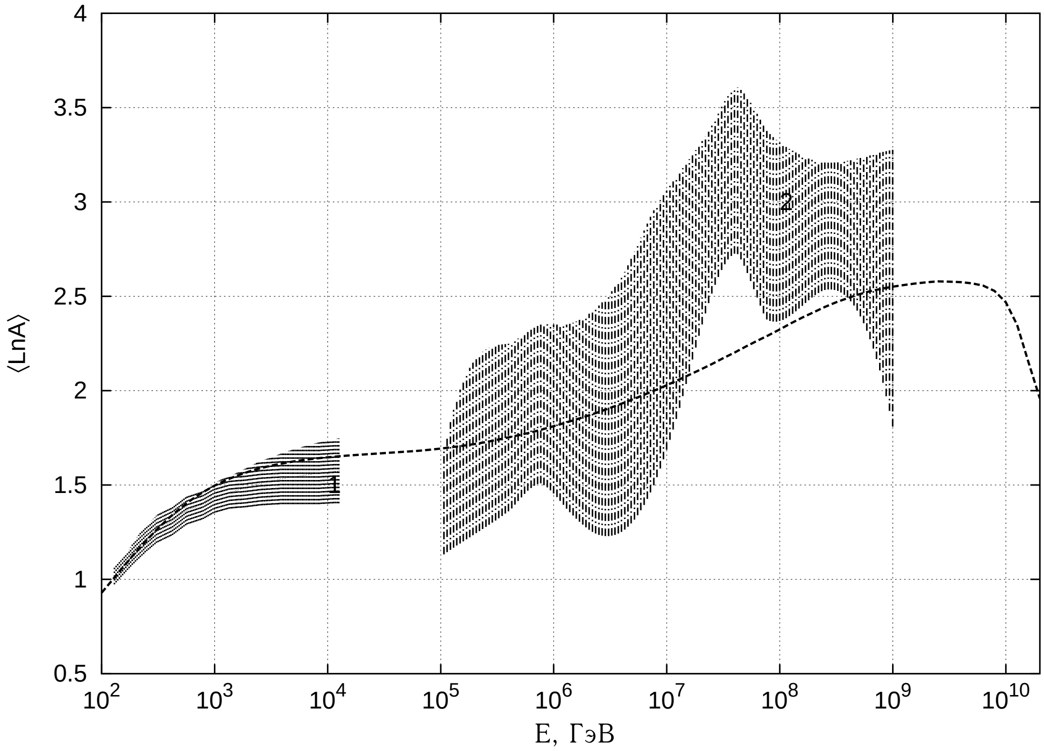

Рис. 13. Зависимость среднего логарифма массового числа космических лучей от энергии первичной частицы. Заштрихованные области — данные измерений: 1— [44], 2— [41]

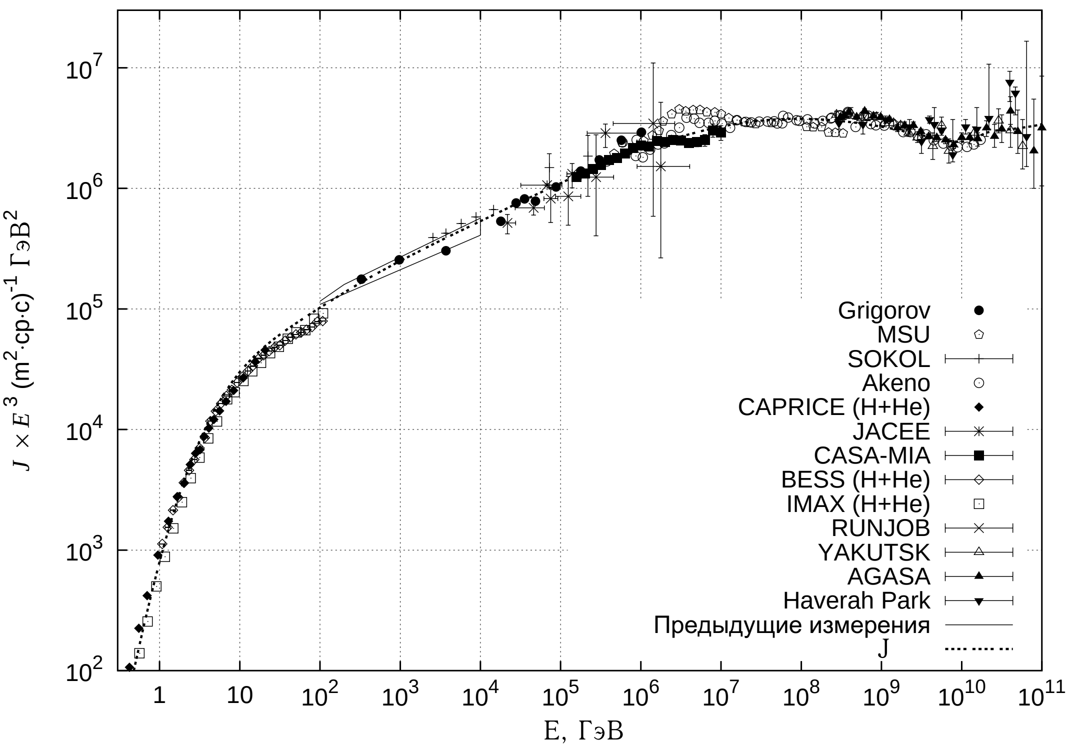

Рис. 14. Сопоставление спектра всех частиц, полученного в модели аномальной диффузии, с экспериментальными данными из [32]

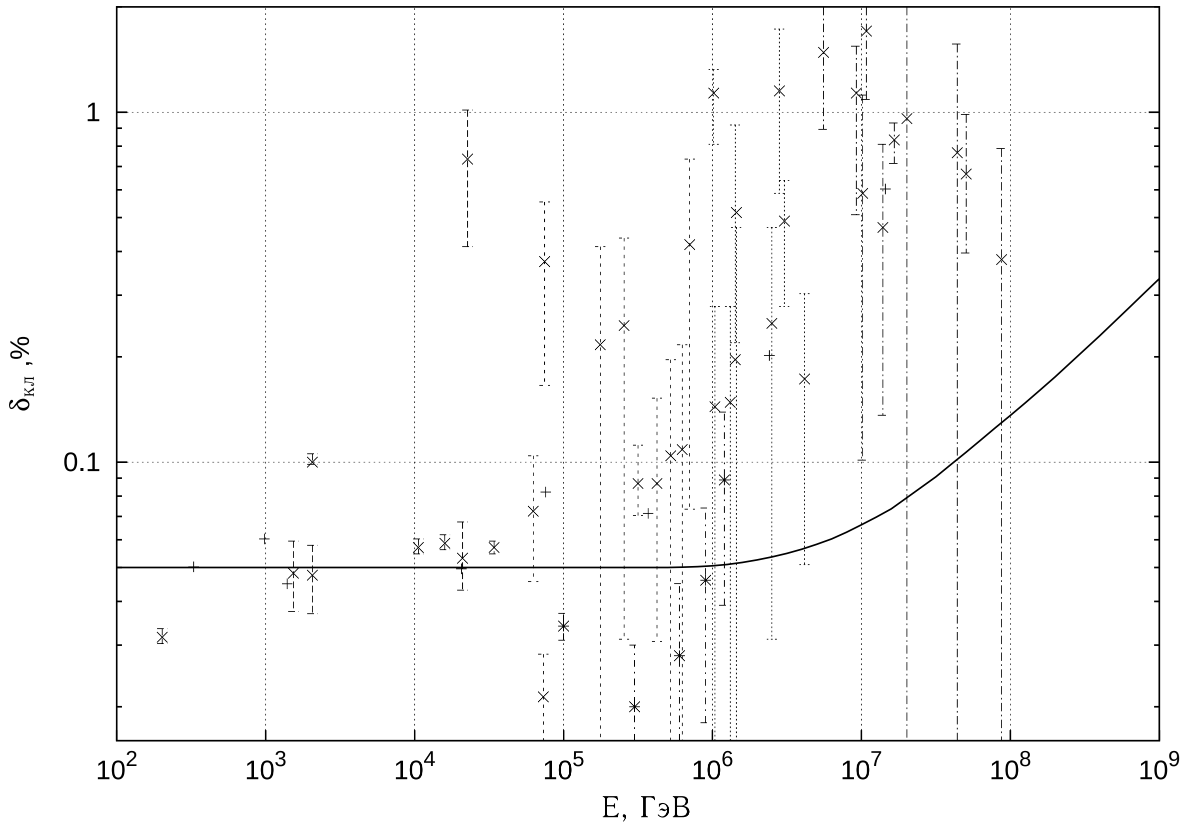

Рис. 15. Зависимость анизотропии космических лучей от энергии. Сплошная кривая — наш расчет в модели аномальной диффузии, символы $(+, \times, *)$ — [2, 45, 46]

$p(E, > r) \sim A(E, \alpha) r^{-\alpha} \sim E^{\delta_L}/r^{\alpha}$, вклад нерассеянного излучения в интенсивность будем описывать выражением

$$J^i_{NS} = \mathrm{C}_{1i} E^{-\gamma+\delta_L}. \qquad (49)$$

В рамках галактической картины происхождения космических лучей эта компонента, определяющая по нашему предположению поведение спектра в области сверхвысоких энергий, приводит к уполаживанию спектра при $E \geq 6 \cdot 10^9$ ГэВ.

Принятое, таким образом, в данной работе представление спектра частиц типа i имеет вид

$$J_i(E) = \frac{v_i}{c} \mathrm{C}_{0i} E^{-p-\delta/\beta} + \frac{v_i}{4\pi} \sum_{\substack{j \\ (r \leq 1 kpc)}} N(\vec{r_j}, t_j, E) + \mathrm{C}_{1i} E^{-p+\delta_L}. \qquad (50)$$

Коэффициенты $\mathrm{C}_{0i}, \mathrm{C}_{1i}$ определяются из экспериментальных данных.

Для учета солнечной модуляции используется модель [51]

$$J_i^{mod}(E_N) = \frac{E_N^2 + 2m_p c^2 E_N}{(E_N + \Phi)^2 + 2m_p c^2 (E_N + \Phi)} \times J_i(E_N + \Phi), \qquad (51)$$

где $E_N = E/A$ — кинетическая энергия на один нуклон, m_p — масса протона, а потенциал $\Phi =$ 750 МэВ [52, 53].

Результаты наших расчетов спектров основных групп ядер (H, He, CNO, Ne-Si, Fe), вклада далеких источников, спектра всех частиц, а также массового состава космических лучей в предположении галактического происхождения частиц приведены на рис 10-14 и в табл. 1.

7. Анизотропия космических лучей в модели аномальной диффузии

Проведем оценки анизотропии космических лучей в рассматриваемой модели аномальной диффузии. Следуя [2, 54], определим анизотропию следующим образом:

$$\delta_{\text{кл}} = \frac{3}{c\langle N \rangle} |j_r|. \qquad (52)$$

Здесь j_r — радиальная компонента тока частиц, а $\langle N \rangle$ — средняя концентрация частиц в Галактике. Поскольку уравнение аномальной диффузии (39) может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{j}, \tag{53}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = D(R, \alpha, \beta)\mathrm{D}_{0+}^{1-\beta}(-\Delta)^{\alpha/2}N(\mathbf{r}, t, R), \tag{54}$$

в которой первое уравнение — уравнение непрерывности, а второе задает в неявной форме обобщенный закон Фика [23], то для тока j_r имеем

$$\begin{aligned} |j_r| &= \left| \frac{1}{r^2} \int\limits_r^\infty \frac{\partial N(r', t, R)}{\partial t} r'^2\, dr' \right| = \\ &= \frac{S'_0 R^{-\gamma}}{r^2 D(R, \alpha, \beta)^{3/\alpha}} \times \\ &\times \left[t^{-3\beta/\alpha} \int\limits_r^\infty dr' r'^2 \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r'(Dt^\beta)^{-1/\alpha}) - \right. \\ &- (t-T)^{-3\beta/\alpha} \times \\ &\times \left. \int\limits_r^\infty dr' r'^2 \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r'(D(t-T)^\beta)^{-1/\alpha}) \right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Среднюю концентрацию частиц $\langle N \rangle$ свяжем с концентрацией частиц от ближайшего источника N соотношением $\langle N \rangle = kN$, где k — число таких источников, обеспечивающих $\langle N \rangle$.

Формула для вычисления анизотропии принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{\text{кл}} &= \frac{3}{ckr^2} \times \\ &\times \left[t^{-3\beta/\alpha} \int\limits_r^\infty dr' r'^2 \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r'(Dt^\beta)^{-1/\alpha}) - \right. \\ &- (t-T)^{-3\beta/\alpha} \times \\ &\times \left. \int\limits_r^\infty dr' r'^2 \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r'(D(t-T)^\beta)^{-1/\alpha}) \right] \times \\ &\times \left[\int\limits_{\max[0, t-T]}^t \tau^{-3\beta/\alpha} \Psi_3^{(\alpha,\beta)}(r(D\tau^\beta)^{-1/\alpha}) \right]^{-1} \end{aligned} \tag{56}$$

Зависимость анизотропии от энергии в предположении аномальной диффузии космических лучей при значениях параметров (p, δ, D_0, α), установленных из анализа спектра всех частиц, демонстрирует рис. 15.

8. Заключение

Установление характера распространения космических лучей высокой энергии в многомасштабной (фрактального типа) галактической среде является одной из ключевых проблем астрофизики космических лучей. В настоящее время не существует теоретического вывода уравнения диффузии космических лучей в такой среде из “первых принципов”. Вместе с тем, имеющийся огромный наблюдательный материал позволяет построить феноменологическую модель с небольшим числом параметров, которым можно придать ясный физический смысл.

Развивая предложенную нами ранее модель аномальной диффузии, в которой распространение частиц моделируется фрактальными блужданиями — скачкообразным случайным процессом с “полетами Ле́ви” и пребываниями в “ловушках Ле́ви”, в данной работе основное внимание уделено определению параметров модели и проверке возможности согласованного описания имеющихся данных по спектрам основных групп ядер, спектру всех частиц, массовому составу и анизотропии при восстановленных параметрах. Основные результаты и выводы работы формулируются следующим образом.

1. Предложен и реализован метод определения основных параметров модели фрактальной диффузии космических лучей. Внешними параметрами метода являются экспериментальные данные о фрактальной размерности галактической среды, величине изменения показателя спектра в районе излома, энергии точки излома, а также параметры 16 ближайших ($r \sim (10^2 - 10^3)$ пк) остатков сверхновых ($t \sim (0,1-4) \times 10^5$ лет) (по данным [4, 55, 56]).

2. Установлено, что показатель спектра генерации частиц в источнике равен $\gamma \approx 2.85$. Спектр частиц в области до излома $E \ll E_k$, формируемый молодыми близкими источниками, характеризуется показателем $\eta \approx 2,6$, а в точке излома равен показателю спектра в источнике γ. Отличие восстановленного значения от показателя $\gamma \approx 2,0 \div 2,2$ модели ускорения частиц в сверхновых приводит к выводу о том, что сверхновые не являются основными источниками ядерной компоненты космических лучей высокой энергии.

3. Показано, что спектр наблюдаемых в Солнечной системе частиц может быть представлен в виде суммы трех компонент. Первая компонента описывает вклад далеких ($r \geq 1$ кпк) старых ($t \geq 10^6$ лет) источников, вто-

рая - вклад от близких молодых источников [48], последняя компонента — излучение от близких молодых источников, достигающее Земли без рассеяния. Согласованное описание основных закономерностей спектров и массового состава получено в рамках гипотезы о том, что далекие источники определяют поведение космических лучей в области энергий $E \leq 10^2$ ГэВ, близкие —

формируют излом при $E \sim 3 \cdot 10^6$ ГэВ, нерассеянное излучение приводит к уполаживанию спектра при $E > 5 \cdot 10^9$ ГэВ.

4. Состав ускоряемых источниками частиц, найденный в рамках модели аномальной диффузии по спектрам различных групп ядер в диапазоне $1 \div 10^6$ ГэВ/нуклон и спектру всех частиц при $E \sim (10^2 \div 10^{11})$ ГэВ, следующий: $p \approx 77\%$, $He \approx 16\%$, $CNO \approx 4\%$, $(Ne - Si) \approx 2\%$, $Fe \approx 1\%$.

5. Тестовые расчеты анизотропии космических лучей показали, что в области энергий $(10^2 - 10^5)$ ГэВ анизотропия практически не зависит от энергии, в области за изломом спектра $(10^7 - 10^8)$ ГэВ наблюдается ее рост. Принимая значения $\delta_{\text{КЛ}} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ для $E \approx 10^3 - 10^4$ ГэВ, модель дает $\delta \sim 10^{-3}$ при $E \approx 10^8$ ГэВ.

9. Благодарность

Авторы выражают благодарность проф. В.В. Учайкину за многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в проведении расчетов на начальном этапе разработки проблемы аномальной диффузии космических лучей, а также семинары, проведенные им в Алтайском государственном университете.

Список литературы

1. *Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И.* Происхождение космических лучей. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л и др.* Астрофизика космических лучей. Под. ред. Гинзбурга В.Л. — Изд. 2-е.-М.: Наука, 1990.
3. *Каплан С.А., Пикельнер С.Б.* Физика межзвездной среды. — М.: Наука, 1979.
4. *Лозинская Т.А.* Сверхновые звезды и звездный ветер: взаимодействие с газом Галактики. — М.: Наука, 1987.
5. *Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М.* Магнитные поля галактик. — М.: Наука, 1988.
6. *Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н.* Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме. — М.: Наука, 1989.
7. *Бочкарев Н.Г.* Локальное межзвездное пространство. — М.: Наука, 1990.
8. *Falgarone E., Phillips T.G., Walker C.K.* The edges of molecular clouds: fractal boundaries and density structure // *ApJ*. — 1991. — **378**. — Pp. 186–201.
9. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитная перемежаемость/ В сб. Нелинейные волны: физика и астрофизика. — М.: Наука, 1993. — С. 47–53.
10. *Chappell D., Scalo J.* Multifractal scaling, geometrical diversity, and hierarchical structure in the cool interstellar medium // *ApJ*. — 2001. — **551**, № 6. — Pp. 712–729.
11. *Combes F.* Astrophysical Fractals: Interstellar Medium and Galaxies. The Chaotic Universe // *Proc. of the Second ICRA Network Workshop, Advanced Series in Astrophysics and Cosmology*. — 2000. — **10**. — P. 143.
12. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960.
13. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. — М.: Наука, 1972.
14. *Elmegreen B.G.* Diffuse $H\alpha$ in a fractal interstellar medium // *Publ. Astron. Soc. Aust.* — 1998. — **15**. — Pp. 74–78.
15. *Bouchaud J., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* — 1990. — **195**. — Pp. 127–293.
16. *Isichenko M.B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // *Rev. Mod. Phys.* — 1992. — **64**. — Pp. 961–1043.
17. *Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M., Klafter J.* Strange kinetics // *Nature*. — 1993. — **363**. — Pp. 31–37.
18. *Чукбар К.В.* Стохастический перенос и дробные производные // *ЖЭТФ*. — 1995. — **108**. — С. 1875–1884.
19. *Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G.* Beyond Brownian motion // *Phys. Today*. — 1996. — **49**. — Pp. 33–39.
20. *Uchaikin V.V., Zolotarev V.M.* Chance and Stability. — VSP, Netherlands, Utrecht, 1999.
21. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* — 2000. — **339**. — Pp. 1–77.
22. Applications of fractional calculus / Ed. by R. Hilfer. — Singapore: Word Scientific, 2000.

23. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *УФН*. — 2003. — **173**, № 8. — С. 847–876.

24. *Учайкин В.В.* Аномальная диффузия и дробно–устойчивые распределения // *ЖЭТФ*. — 2003. — **124**. — С. 903–920.

25. *Лагутин А.А., Никулин Ю.А., Учайкин В.В.* Излом в спектре космических лучей как следствие фрактальности магнитного поля Галактики. — Препринт АГУ. — № 4. — Барнаул. — 2000.

26. *Lagutin A.A., Nikulin Yu.A., Uchaikin V.V.* The knee in the primary cosmic ray spectrum as consequence of the anomalous diffusion of the particles in the fractal interstellar medium // *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*. — 2001. — **97**. — Pp. 267–270.

27. *Lagutin A.A., Strelnikov D.V., Tyumentsev A.G.* Mass composition of cosmic rays in anomalous diffusion model: comparison with experiment // Proc. of the 27th ICRC (Hamburg). — 2001. — **5**. — Pp. 1896–1899. — astro-ph/0107231.

28. *Lagutin A.A., Uchaikin V.V.* Fractional diffusion of cosmic rays // Proc. of the 27th ICRC (Hamburg). — 2001. — **5**. — Pp. 1896–1899. — astro-ph/0107230.

29. *Lagutin A.A.* Anomalous diffusion of the cosmic rays in the fractal Galaxy // *Problems of atomic science and tecnology*. — 2001. — № 6(2). — Pp. 214–217.

30. *Lagutin A.A., Uchaikin V.V.* Anomalous diffusion equation: Application to cosmic ray transport // *Nucl. Instrum. Meth.* — 2003. — **B201**. — Pp. 212–216.

31. *Erlykin A. D., Lagutin A. A., Wolfendale A. W.* Properties of the interstellar medium and the propagation of cosmic rays in the Galaxy // *Astropart. Phys.* — 2003. — **19**. — Pp. 351–362.

32. *Лагутин А.А., Тюменцев А.Г.* Энергетические спектры космических лучей в галактической среде фрактального типа // *Изв. РАН. Сер. физ.* — 2003. — **67**, № 4. — С. 439–442.

33. *Montroll E.W., Weiss G.H.* Random walks on lattices. II // *J. Math.Phys.* — 1965. — **6**, № 2. — Pp. 167–181.

34. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967.

35. *Uchaikin V.V.* Montroll-Weiss problem, fractional equations, and stable distributions // *Intern. J. of Theor. Phys.* — 2000. — **39**, № 8. — Pp. 2087–2105.

36. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

37. *Учайкин В.В.* Субдиффузия и устойчивые законы // *ЖЭТФ*. — 1999. — **115**. — С. 2113–2123.

38. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.

39. *Chuvilgin L.G., Ptuskin V.S.* Anomalous diffusion of cosmic rays across the magnetic field // *A&A*. — 1993. — **297**. — Pp. 278–297.

40. *Nagano M., Teshima M., Matsubara Y. et al.* Energy spectrum of primary cosmic rays above $10^{17.0}$ eV determined from extensive air shower experiments at Akeno // *J. Phys. G: Nucl. Phys.* — 1992. — **18**. — Pp. 423–442.

41. *Hörandel J. R.* On the knee in the energy spectrum of cosmic rays // *Astropart. Phys.* — 2003. — **19**. — Pp. 193–220.

42. *Isliker H., Vlahos L.* Random walk through fractal environments // *Phys. Rev. E*. — 2003. — **67**, № 2. — Pp. 26413–26434. — physics/0211113.

43. *Лагутин А.А., Райкин Р.И., Тюменцев А.Г.* Распределение первого пробега в галактической среде фрактального типа // *настоящий выпуск*. — С. 22–26.

44. *Shibata T.* Energy spectrum and primary composition from direct measurments // *Nucl. Phys. B*. — 1999. — **75**.

45. *Clay R.W., Smith A.G.K.* Cosmic Ray Anisotropies and Auger // Extremely high energy cosmic rays: astrophysics and future observatories (Tokyo). — 1996. — Pp. 104–124.

46. *Aglietta M., Alessandro B., Antonioli P. et al.* The cosmic ray anisotropy between 10^{14} and 10^{15} ev // Proc. of the 28th ICRC (Tsukuba). — 2003. — P. 183–186.

47. *Lagutin A.A., Makarov V.V., Tyumentsev A.G.* Anomalous diffusion of the cosmic rays: steady-state solution // Proc. of the 27th ICRC (Hamburg). — 2001. — **5**. — Pp. 1889–1891. — astro-ph/0107253.

48. *Лагутин А.А., Тюменцев А.Г.* Спектр электронов в Галактике // *настоящий выпуск*. — С. 27–31.

49. *Erlykin A. D., Wolfendale A. W.* High energy cosmic ray spectroscopy. III. Further analyses // *Astropart. Phys.* — 1998. — **8**. — Pp. 265–281.

50. *Erlykin A. D., Wolfendale A. W.* Supernova remnants and the origin of the cosmic radiation: I. SNR acceleration models and their predictions // *J. Phys. G Nucl. Phys.* — 2001. — **27**. — Pp. 941–958.

51. *Gleeson L.J., Axford W.I.* Solar modulation of galactic cosmic rays // *ApJ.* — 1968. — **154**. — Pp. 1011–1025.

52. *Boezio M., Carlson P., Francke T. et al.* The cosmic-ray proton and helium spectra between 0.4 and 200 GV // *ApJ.* — 1999. — **518**. — Pp. 457–472.

53. *Menn W., Hof M., Reimer O. et al.* The absolute flux of protons and helium at the top of the atmosphere using IMAX // *ApJ.* — 2000. — **533**. — Pp. 281–297.

54. *Dorman L.I., Ghosh A., Ptuskin V.S.* Diffusion of the Galactic cosmic rays in the vicinity of the solar system // *Astrophys. and Space Sci.* — 1985. — **109**. — Pp. 87–97.

55. *Kobayashi T., Nishimura J., Komori Y., Yoshida K.* Vela as the most likely source for the primary electrons in TeV region // *Adv. Space Res.* — 2001. — **27**. — Pp. 653–658.

56. *Nishimura J., Fujii M., Taira T.* Electron spectrum at the high energy side // Proc. of the 16th ICRC (Kyoto). — 1979. — **1**. — Pp. 488–493.