УДК 532.5 + 536.2

В.И. Волков

Некоторые особенности течения неньютоновской жидкости

В работе приводится оценка коэффициента сопротивления для течения жидкости, динамическая вязкость которой описывается законом Кессона. Полученный коэффициент сопротивления сравнивается с известными коэффициентами сопротивления ньютоновской жидкости для течений Куэтта, плоского и цилиндрического течений Пуазейля. Делается вывод, что течение неньютоновских жидкостей, подчиняющихся закону Кессона, в частности крови, может иметь коэффициент сопротивления в несколько раз меньший, чем при течении Пуазейля обычных жидкостей.

Для течения в горизонтальном капилляре полем тяжести можно пренебречь. Запишем условие равновесия столба жидкости, на который действуют две силы в разных направлениях: силы давления $(P_1 - P_2)\pi \cdot r^2$ и силы вязкого трения $- 2\pi r\, L \cdot \tau$ (рис. 1).

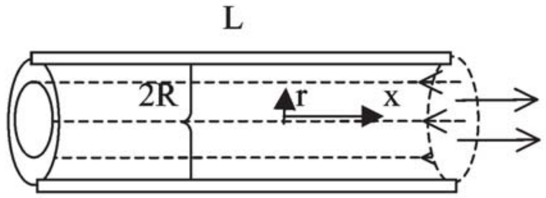

Рис. 1. Схема для расчета условия равенства действующих сил

Или после алгебраических преобразований этого условия равновесия получим следующее соотношение:

$$(P_1 - P_2) \cdot r = 2L \cdot \tau. \quad (1)$$

В этом уравнении касательное напряжение τ задается уравнением Кессона [1]

$$\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_0} = \sqrt{\left(\frac{-\mu dU}{dr}\right)}, \quad (2)$$

где τ_o – начальное напряжение сдвига, μ – динамическая вязкость.

В выбранной системе координат (рис. 1) перед градиентом скорости в (2) необходимо поставить минус. Обозначив $\frac{(P_1 - P_2)}{L} = \Gamma$ из уравнения (1) и (2), получим:

$$(\sqrt{(0.5\Gamma r)} - \sqrt{\tau_0})^2 = \frac{-\mu dU}{dr}. \quad (3)$$

Уравнение (3) – обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, интегрирование которого даст следующее выражение:

$$-\mu U = 0.25\Gamma r^2 - 2\sqrt{0.5\Gamma\tau_0} * \sqrt{\frac{r^3}{3}} + \tau_0 r + C, \quad (4)$$

где C – константа интегрирования, которая найдется из обращения в ноль скорости на стенке при r = R.

После определения постоянной интегрирования окончательно выразим скорость:

$$U = 0.25\Gamma R^2 \left(\frac{1 - r^2/R^2}{\mu}\right) - 2\left(\sqrt{0.5\Gamma\tau_0 \frac{R^3}{\mu^2}}\right) * \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{r^3}{R^3}}}{3}\right) + \frac{\tau_0 R\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\mu}. \quad (5)$$

Первое слагаемое в уравнении (5) соответствует пуазейлевскому профилю скорости, а в двух других слагаемых учитывается специфика начального напряжения сдвига. Значение радиуса r*, при котором достигается максимальное значение скорости при параболическом распределении, проще всего найти из уравнения (3), в котором следует положить градиент скорости равным нулю.

$$r^* = 2\tau_o / \Gamma. \quad (6)$$

Качественно график распределения скорости жидкости по сечению капилляра можно изобразить следующим образом (рис. 2).

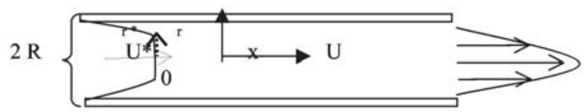

Рис. 2. График скорости в трубе для ньютоновской и неньютоновской жидкостей

Справа на рисунке 2 приведена обычная парабола, соответствующая течению ньютоновской жидкости, а слева – жидкости, описываемой уравнением Кессона. После обращения в ноль производной в уравнении (3) скорость перестает меняться по радиусу и вблизи центра образуется стержневое течение, в котором слои жидкости не движутся относительно друг друга. Подставив (6) в уравнение (5), найдем максимальное значение скорости U*

$$\mu U^* = 0.25\Gamma R^2 + \tau_0 R - \frac{7\tau_0^2}{3\Gamma} - \frac{\sqrt{2\Gamma R^3 \tau_0}}{3}, \tag{7}$$

или с учетом того, что r * / R < 1, соотношение (7) можно переписать

$$U^* \approx \frac{\Gamma R^2}{\mu}\left[0.25 - \frac{\sqrt{\frac{r^*}{R}}}{3} + 0.5\frac{r^*}{R}\right]. \tag{8}$$

Оценим r* для сосуда радиуса 1 мм и длиной 5 см при градиенте давления Г = 40 Па/м и динамической вязкости $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па · с [2]. За численное значение предела текучести τ_o возьмем значение напряжение сдвига при невысоких градиентах скорости в следующем диапазоне: $0{,}001 < \tau_o < 0{,}005$ Па [1]. С учетом численных значений из соотношения (6) получим:

$$5 \cdot 10^{-5} < r^* < 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \tag{9}$$

Полный диаметр канала внутри сосуда, занятый стержневым течением, находится в пределах от 0,1 мм до 0,5 мм. Или максимальное значение диаметра стержневого сечения может занимать половину диаметра сосуда. Найдем среднюю расходную скорость U_o в сосуде, проинтегрировав соотношение (5) по сечению сосуда от r* до R и прибавив среднюю скорость в стержневом сечении.

$$U_0 = \frac{2\int U r dr}{R^2} + \frac{U^* r^{*2}}{R^2}. \tag{10}$$

Окончательно оставляя члены первого порядка малости, получим:

$$U_0 \approx \frac{\Gamma R^2}{\mu}\left(0.125 - \frac{\sqrt{\frac{r^*}{R}}}{7}\right) + \frac{r^*}{6R}. \tag{11}$$

Касательное напряжение на стенки найдем из соотношения (3) с учетом (6).

$$\frac{\mu dU}{dr} = (0.5\Gamma R)\left(1 - \sqrt{\frac{r^*}{R}}\right)^2. \tag{12}$$

Оценим коэффициент сопротивления для течения по закону Кессона. Коэффициент сопротивления по определению есть отношение силы трения на единицу внутренней поверхности сосуда или касательного напряжения на стенки к скоростному напору:

$$c_f = \frac{2\mu \frac{dU}{dr}}{\rho U_0^2}. \tag{13}$$

Подставив в (13) выражения (11) и (13), получим коэффициент сопротивления в следующем виде:

$$c_f = \frac{\frac{16}{\mathrm{Re}}\left(1 - \sqrt{\frac{r^*}{R}}\right)^2}{1 - 8\frac{\sqrt{\frac{r^*}{R}}}{7} + \frac{4}{3}\frac{r^*}{R}}, \tag{14}$$

где число Рейнольдса Re построено по расходной скорости и диаметру сосуда с протекающей жидкостью.

Для численной оценки этого коэффициента используем выражение (9), в результате получим следующую цепочку неравенств:

$$1{,}6/\mathrm{Re} < c_f < 9{,}8/\mathrm{Re}. \tag{15}$$

Для течения Куэтта, в котором одна стенка движется относительно другой, этот коэффициент равен $c_f = 4/\mathrm{Re}$. Для течения Пуазейля в плоском и цилиндрическом каналах коэффициенты сопротивления равны соответственно $c_f = 12/\mathrm{Re}$ и $c_f = 16/\mathrm{Re}$. Таким образом, верхний предел коэффициента сопротивления для течения Кессона в цилиндрическом канале не превышает коэффициента сопротивления для плоского течения, когда поток ограничен только двумя параллельными стенками. В нижнем же пределе коэффициент сопротивления для течения Кессона почти в три раза меньше, чем в течении Куэтта, имеющем минимальный коэффициент сопротивления из-за относительного движения лишь одной стенки. Следует отметить, что уравнение Кессона эмпирическое и, по всей видимости, наблюдаемое в экспериментах формирование в центре капилляров столбиков эритроцитов неявно учитывается стержневым течением, полученным из приведенного выше решения уравнения Навье-Стокса, которое после взятия первого интеграла имеет вид (1).

Литература

1. Владимиров Ю.А., Рощупкин Д.И., Потапенко А.Я., Деев А.И. Биофизика. М., 1983.

2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. М., 1999.