УДК 519.812

Г.И. Алгазин

Моделирование механизмов достижения равновесия рынка с посредником*

В статье рассматривается модель рационального поведения посредника на конкурентных товарных рынках. На основе анализа условий Куна-Таккера показано, что в ряде важных случаев данной модели объем спроса потребителей равен объему предложения производителей. С использованием итерационного процесса Эрроу-Гурвица предложены новые механизмы взаимодействия экономических агентов товарных рынков, в которых посреднические звенья выполняют основную роль по координации товарных потоков. Основная особенность предлагаемых механизмов состоит в том, что посредник, осуществляя координацию товарных потоков путем назначения цен спроса и цен предложения, стремится к достижению состояния равновесия рынка, для которого локально-оптимальные решения задач потребителей и производителей являются одновременно оптимальными для посредника. При этом имеются возможности обеспечения монотонной сходимости к состоянию равновесия, не зависящему от начального состояния рынка.

Базисной для исследования поведения торгового посредника является следующая задача – максимизировать доход посредника:

$$R(p^d, p^s) = \sum_{j=1}^{n} p_j^d \cdot q_j^d(p^d) - \\ - \sum_{j=1}^{n} p_j^s \cdot q_j^s(p^s) \to \max, \qquad (1)$$

при условиях

$$q_j^s(p^s) \ge q_j^d(p^d), \quad (j = \overline{1,n}), \\ p_j^d, p_j^s \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2)$$

Здесь: $q_j^d(p^d)$, $q_j^s(p^s)$ – функции совокупного покупательского спроса и совокупного предложения на j товар;

$p^d = (p_1^d, \ldots, p_j^d, \ldots, p_n^d)$,

$p^s = (p_1^s, \ldots, p_j^s, \ldots, p_n^s)$ – вектора цен спроса и цен предложения на товары.

Решение этой задачи сводится к отысканию неотрицательной седловой точки функции Лагранжа

$$L(p^d, p^d, \lambda) = R(p^d, p^s) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [q_j^s(p^s) - q_j^d(p^d)].$$

Условия Куна-Таккера для седловой точки имеют вид:

1) $\tilde{p}_j^d \cdot \dfrac{\partial L}{\partial p_j^d} = \tilde{p}_j^d \cdot (q_j^d + \sum_{v=1}^{n} \tilde{p}_v^d \cdot \dfrac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d} - \sum_{v=1}^{n} \tilde{\lambda}_v \cdot \dfrac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}) = 0,$ $(j = \overline{1,n});$

2) $\tilde{p}_j^s \cdot \dfrac{\partial L}{\partial p_j^s} = \tilde{p}_j^s \cdot (-q_j^s - \sum_{v=1}^{n} \tilde{p}_v^s \cdot \dfrac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s} + \sum_{v=1}^{n} \tilde{\lambda}_v \cdot \dfrac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s}) = 0,$ $(j = \overline{1,n});$ (3)

3) $\tilde{\lambda}_j \cdot \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \tilde{\lambda}_j \cdot (q_j^s - q_j^d) = 0, \quad (j = \overline{1,n}).$

Проиллюстрируем решение этой задачи на достаточно простом примере, когда имеется рынок одного товара, а спрос и предложение являются линейными функциями цен [1]:

$q^d(p^d) = a - b \cdot p^d, \quad q^s(p^s) = c + f \cdot p^s, \quad a, b, f > 0$ и $a > c \ge 0.$ (4)

Условия (3) для данного примера принимают вид:

$$\tilde{p}^d \cdot (a - 2b\tilde{p}^d + b\tilde{\lambda}) = 0, \qquad (5)$$

$$\tilde{p}^s \cdot (-c - 2f\tilde{p}^s + f\tilde{\lambda}) = 0, \qquad (6)$$

$$\tilde{\lambda} \cdot (c + f\tilde{p}^s - a + b\tilde{p}^d) = 0. \qquad (7)$$

Имеем следующее решение системы уравнений (5)–(7):

– при $a - 2c \le 0$ оптимальные значения переменных равны $\tilde{p}^d = \dfrac{a}{2b}$, $\tilde{p}^s = 0, \tilde{\lambda} = 0$ и максимальное значение дохода потребителя составит $R_{\max} = \dfrac{a^2}{4b}$;

– при $0 < a - 2c \le \dfrac{bc}{f}$ оптимальные значения переменных равны $\tilde{p}^d = \dfrac{a-c}{b}$, $\tilde{p}^s = 0, \tilde{\lambda} = \dfrac{a-2c}{b}$ и

* Работа поддержана РФФИ, грант 03-06-80247.

максимальное значение дохода потребителя составит $R_{\max}=\frac{c(a-c)}{b}$;

– при $\frac{bc}{f}\le a-2c$ оптимальные значения переменных равны $\tilde{p}^d=\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{b}+\frac{a-c}{b+f})$, $\tilde{p}^s=\frac{1}{2f}\cdot(a-2c-b\cdot\frac{a-c}{b+f})$, $\tilde{\lambda}=\frac{a-c}{b+f}$ и максимальное значение дохода потребителя составит $R_{\max}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(af+bc)^2}{bf(b+f)}$.

Пусть в модели (1), (2) функции предложения каждого товара не зависят от цен на другие товары. Тогда вторая группа равенств условий (3) запишется в следующем виде:

$$\tilde{p}_j^s\cdot\frac{\partial L}{\partial p_j^s}=\tilde{p}_j^s\cdot(-q_j^s-\tilde{p}_j^s\cdot\frac{\partial q_j^s}{\partial p_j^s}+\tilde{\lambda}_v\cdot\frac{\partial q_j^s}{\partial p_j^s})=0,\quad (j=\overline{1,n}).$$

Тогда: 1) если $\tilde{p}_j^s>0$ и выполнено хотя бы одно из двух условий (что, как правило, имеет место или предполагается для конкурентных рынков): $q_j^s(\tilde{p}_j^s)>0$ либо $\frac{\partial q_j^s}{\partial p_j^s}(\tilde{p}_j^s)>0$. Получаем $q_j^s=(\tilde{\lambda}_j-\tilde{p}_j^s)\cdot\frac{\partial q_j^s}{\partial p_j^s}$ и, следовательно, $\tilde{\lambda}_j\ge\tilde{p}_j^s>0$. Из третьей группы равенств условий Куна-Таккера имеем, что спрос равен предложению; 2) если принять естественные предположения, что $q_j^s(\tilde{p}_j^s)=0$ при $\tilde{p}_j^s=0$, то опять из той же группы условий следует равенство $q_j^d(\tilde{p}^d)=0$, т.е. также спрос равен предложению.

Представляет также интерес в рамках модели поведения посредника (1)–(2) провести анализ рынка, предполагающего рациональное поведение потребителей. Рациональное поведение потребителей моделируется как максимизация непрерывной порядковой функции полезности, представляющей субъективные предпочтения на множестве товаров, доступных при данном бюджете. При этом совокупный спрос рассматривается как сумма индивидуальных (и независимых) спросов с фиксированным совокупным доходом потребителей (см., например, [1–3]).

Учитывая полное использование рациональными потребителями совокупного дохода (I), а именно: $\sum_{j=1}^{n}p_j^d\cdot q_j^d(p^d)=I$, получим следующее выражение для функции Лагранжа

$$L(p^d,p^d,\lambda,\mu)=R(p^d,p^s)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j[q_j^s(p^s)-q_j^d(p^d)]+$$
$$+\mu[\sum_{j=1}^{n}p_j^d\cdot q_j^d(p^d)-I].$$

Тогда условия Куна-Таккера для седловой точки примут вид:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \tilde{p}_j^d\cdot\frac{\partial L}{\partial p_j^d}=\tilde{p}_j^d\cdot[(1+\mu)(q_j^d+\sum_{v=1}^{n}\tilde{p}_v^d\cdot\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d})-\\
&\qquad -\sum_{v=1}^{n}\tilde{\lambda}_v\cdot\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}]=0,\quad (j=\overline{1,n});\\
&2)\quad \tilde{p}_j^s\cdot\frac{\partial L}{\partial p_j^s}=\tilde{p}_j^s\cdot(-q_j^s-\sum_{v=1}^{n}\tilde{p}_v^s\cdot\frac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s}+\\
&\qquad +\sum_{v=1}^{n}\tilde{\lambda}_v\cdot\frac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s})=0,\quad (j=\overline{1,n});\\
&3)\quad \tilde{\lambda}_j\cdot\frac{\partial L}{\partial\lambda_j}=\tilde{\lambda}_j\cdot(q_j^s-q_j^d)=0,\quad (j=\overline{1,n});\\
&4)\quad \frac{\partial L}{\partial\mu}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{p}_j^d\cdot q_j^d-I=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Принимая во внимание, что $q_j^d+\sum_{v=1}^{n}\tilde{p}_v^d\cdot\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}=0$, получим из первой группы приведенных равенств соотношения: $\frac{\partial L}{\partial p_j^d}=-\sum_{v=1}^{n}\tilde{\lambda}_v\cdot\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}\le 0$, $(j=\overline{1,n})$. Из этих соотношений следует: если $\tilde{\lambda}_j>0$ и $\frac{\partial q_j^d}{\partial p_j^d}<0$, то в оптимальном решении обязательно должны быть товары v, $(v=\overline{1,n},\ v\ne j)$ такие, что $\tilde{\lambda}_v>0$ и $\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}>0$. В теории потребительского спроса товары j и v, удовлетворяющие соотношениям и $\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}>0$, называются взаимозаменяемыми. Для таких товаров, как это следует из третьей группы равенств условий Куна-Таккера (8), спрос будет равен предложению.

Вернемся к более общему случаю задачи поведения посредника – модели (1)–(3). Для этой модели процедура отыскания неотрицательной седловой точки функции Лагранжа $L(p^d,p^d,\lambda)$ реализуется путем следующей конкретизации итерационного процесса Эрроу-Гурвица:

1) $p_j^d(t+1) = \max\{0;\quad p_j^d(t) + \alpha_j^d[q_j^d(t) + \sum_{v=1}^{n} p_v^d(t)\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}(t) - \sum_{v=1}^{n}\lambda_v(t)\frac{\partial q_v^d}{\partial p_j^d}(t)]\},$

$(j=\overline{1,n});$

2) $p_j^s(t+1) = \max\{0;\ p_j^s(t) + \alpha_j^s[-q_j^s(t) - \sum_{v=1}^{n} p_v^s(t)\frac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s}(t) + \sum_{v=1}^{n}\lambda_v(t)\frac{\partial q_v^s}{\partial p_j^s}(t)]\},\quad (9)$

$(j=\overline{1,n});$

3) $\lambda_j(t+1) = \max\{0;\quad \lambda_j(t) - \beta_j[q_j^s(t) - q_j^d(t)]\},\quad (j=\overline{1,n}).$

Здесь t – номер итерации. Начальные значения переменных $p_j^d(0), p_j^s(0), \lambda_j(0)$ для $j=\overline{1,n}$ предполагаются известными (заданными) величинами. Знак «max» обеспечивает неотрицательность переменных в ходе реализации итерационного процесса. Положительные числа $\alpha_j^d, \alpha_j^s, \beta_j$ являются параметрами настройки итерационного процесса.

Пусть в линейной модели рынка (4) $a=100, b=2, c=30, f=10$ и $p^d(0)=20, p^s(0)=5, \lambda=2.$ Положим также $\alpha^d=\alpha^s=0.1, \beta=0.2.$

Тогда соответствующие (9) итерационные соотношения примут вид:

$$p^d(t+1) = p^d(t) + 0.1\cdot[100 - 4p^d(t) + 2\lambda(t)] = 10 + 0.6p^d(t) + 0.2\lambda(t), \quad (10)$$

$$p^s(t+1) = \max\{0;\quad p^s(t) + 0.1\cdot[-30 - 20p^s(t) + 10\lambda(t)]\} = \max\{0;\quad -3 - p^s(t) + \lambda(t)\}, \quad (11)$$

$$\lambda(t+1) = \max\{0;\quad \lambda(t) - 0.2\cdot[30 + 10p^s(t) - 100 + 2p^d(t)]\} = \max\{0;\quad 14 - 0.4p^d(t) - 2p^s(t) + \lambda(t)\}. \quad (12)$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Точное решение задачи рассмотренного выше примера, полученное как решение системы уравнений (5)–(7) при $\frac{bc}{f} \le a - 2c$, составит: $\tilde{p}^d = 27.92, \tilde{p}^s = 1.42, \tilde{\lambda} = 5.83.$ По данным, приведенным в таблице 1, видно, что итерационный процесс при таком подборе значений параметров настройки дает лишь довольно грубое, имеющее колебательный характер, приближение к решению. Изменим эти значения, уменьшив их в 4 раза и положив $\alpha^d=\alpha^s=0.025, \beta=0.05,$ и построим новый итерационный процесс с прежними начальными условиями:

Таблица 1

Сходимость процесса поиска оптимального решения для посредника

t	$p^d(t)$	$p^s(t)$	$\lambda(t)$	$q^s(t)-q^d(t)$
0	20	5	2	20
1	22.4	0	0	–25.2
2	23.44	0	5.04	–23.12
3	25.07	2.04	9.66	1.18
4	26.97	1.93	5.86	3.24
5	27.35	0.93	5.21	–6
6	27.45	1.28	6.41	–2.3
7	27.75	2.13	6.87	6.8
8	28.02	1.74	5.51	3.44
9	27.91	0.77	4.82	–6.48
10	27.71	1.05	6.12	–4.08
11	27.85	2.07	7.02	6.4
12	28.11	1.95	5.74	5.72
13	28.01	0.79	4.6	–6.08
14	27.72	0.81	5.82	–6.46
15	27.79	2.01	7.11	5.68

$$p^d(t+1) = p^d(t) + 0.025\cdot[100 - 4p^d(t) + 2\lambda(t)] = 2.5 + 0.9p^d(t) + 0.05\lambda(t), \quad (13)$$

$$p^s(t+1) = \max\{0;\quad p^s(t) + 0.025\cdot[-30 - 20p^s(t) + 10\lambda(t)]\} = \max\{0;\quad -0.75 + 0.5p^s(t) + 0.25\lambda(t)\}, \quad (14)$$

$$\lambda(t+1) = \max\{0;\quad \lambda(t) - 0.05\cdot[30 + 10p^s(t) - 100 + 2p^d(t)]\} = \max\{0;\quad 3.5 - 0.1p^d(t) - 0.5p^s(t) + \lambda(t)\}. \quad (15)$$

Соответствующие расчеты (фрагментарно) приведены в таблице 2.

Таблица 2

Сходимость процесса поиска оптимального решения для посредника

t	$p^d(t)$	$p^s(t)$	$\lambda(t)$	$q^s(t)-q^d(t)$
0	20	5	2	20
5	22.51	0.19	5.05	–23.08
10	24.95	2.08	7.48	0.7
15	26.46	2.06	6.79	3.52
20	27.18	1.69	6.2	1.26
25	27.53	1.53	6.0	0.36
30	27.72	1.47	5.91	0.15
35	27.80	1.44	5.87	–0.01

В данном случае процесс медленно, но сходится к точному решению. При этом, начиная с третьего шага, он принимает строго монотонный характер.

Для фиксации момента окончания итерационного процесса (9) можно использовать следующие правила:

1) задание определенного числа (T) итераций; после чего полученные значения $p^d(T)$, $p^s(T)$, $\lambda(T)$ считаются координатами искомой седловой точки [5];

2) критерий совпадения вида

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{n}[p_j^d(t+1) - p_j^d(t)]^2 + \\ + \sum_{j=1}^{n}[p_j^s(t+1) - p_j^s(t)]^2 < \varepsilon,$$

где ε – достаточно малое заданное число;

3) или критерий совпадения вида

Приведем также аналоги итерационных формул (9) в дифференциальной форме, полезной при анализе свойств приведенного механизма достижения рыночного равновесия:

1) $$\frac{\partial p_j^d}{\partial t} = \delta_j^d \cdot L_{p_j^d} = \delta_j^d \cdot \left(q_j^d + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^d \frac{\partial q_\nu^d}{\partial p_j^d} - \sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu \frac{\partial q_\nu^d}{\partial p_j^d}\right),$$

$(j = \overline{1,n})$,

где $\delta_j^d = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad p_j^d = 0 \; \textit{и} \; L_{p_j^d} < 0. \\ 1, & \textit{для всех остальных случаев}; \end{cases}$

2) $$\frac{\partial p_j^s}{\partial t} = \delta_j^s \cdot L_{p_j^s} = \delta_j^s \cdot \left(-q_j^s - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^s \frac{\partial q_\nu^s}{\partial p_j^s} + \sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu \frac{\partial q_\nu^s}{\partial p_j^s}\right),$$

$(j = \overline{1,n})$, (16)

где $\delta_j^s = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad p_j^s = 0 \; \textit{и} \; L_{p_j^s} < 0. \\ 1, & \textit{для всех остальных случаев}; \end{cases}$

3) $$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t} = -\delta_{\lambda_j} \cdot L_{\lambda_j} = \delta_{\lambda_j} \cdot (q_j^s - q_j^d), \quad (j = \overline{1,n}),$$

где $\delta_{\lambda_j} = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \delta_{\lambda_j} = 0 \; \textit{и} \; L_{\lambda_j} > 0. \\ 1, & \textit{для всех остальных случаев.} \end{cases}$

Литература

1. Самуэльсон П. Экономика. М., 1993. Т. 1–2.
2. Вэриан Х. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М., 1997.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика. М., 1998.
4. Багриновский К.А., Матюшок В.М. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика). М., 1999.