

УДК 532.4

А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков

Устойчивость течения проводящей жидкости в кольцевом зазоре при наличии продольного магнитного поля

Введение. В этой работе в рамках линейной теории исследована устойчивость течения проводящей жидкости в кольцевом зазоре при наличии продольного магнитного поля по отношению к малым возмущениям. Для этого использован метод дифференциальной прогонки [2].

Полученные ранее результаты исследования устойчивости течения хорошо проводящей жидкости носят разрозненный характер. Возросшие в последнее время возможности компьютерного моделирования позволяют провести более подробный анализ устойчивости и определить критические параметры в широком диапазоне магнитных чисел Прандтля.

Постановка задачи. Рассмотренная конфигурация представлена на рисунке 1. Это два коаксиальных цилиндра, между которыми течет проводящая жидкость. Магнитное поле однородно и направлено вдоль оси цилиндров, невозмущенное движение предполагается стационарным и параллельным с профилем скорости V , зависящим только от r :

$$V = ar^2 + b \ln(r) + c,$$

$$a = \frac{2 \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{1 + 2\xi - \left(1 + 2\xi + 2\xi^2\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)},$$

$$b = -a \frac{1 + 2\xi}{\ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)},$$

$$c = a \frac{(1 + 2\xi) \ln(\xi)}{\ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)} - a\xi^2, \quad (1)$$

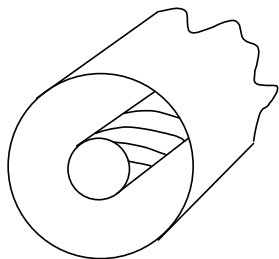


Рис. 1. Конфигурация течения проводящей жидкости

где буквой ξ обозначен безразмерный радиус внутреннего цилиндра.

Движение жидкости и магнитное поле в ней определяются уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\nabla \left(p + A \frac{H^2}{2} \right) + A (H \nabla) H + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (V \nabla) H = (H \nabla) V + \frac{1}{R_m} \Delta H, \quad (2)$$

$$\text{div } V = 0,$$

$$\text{div } H = 0,$$

где $A = \frac{Ha^2}{\text{Re } R_m}$ – число Альфвена; $Ha = \frac{dH_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ – число Гартмана; $\text{Re} = \frac{V_0 d}{\nu}$ – число Рейнольдса; $R_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$ – магнитное число Рейнольдса.

В рамках линейной теории решения ищем в виде основного течения и малой добавки

$$\begin{aligned} V &= V_0 + v, \\ H &= H_0 + h, \\ P &= P_0 + p. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (V_0 \nabla) h + (v \nabla) H_0 &= \\ = (H_0 \nabla) v + (h \nabla) V_0 + \frac{1}{R_m} \Delta h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (V_0 \nabla) v + (v \nabla) V_0 &= \\ = -\nabla p - A \nabla (H_0 h) + A (H_0 \nabla) h + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{div } v = 0,$$

$$\text{div } h = 0.$$

Элементарное волновое решение этой системы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_\phi \end{pmatrix} \omega_\phi \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_\phi \end{pmatrix} \quad (5)$$

ω (ω_ϕ) ω (ω_ϕ) — компоненты амплитуды возмущения скорости, ω (ω_ϕ) (ω) — компоненты амплитуды магнитного поля, q — амплитуда давления. Подставляя (5) в (4), получим задачу на отыскание собственных значений $\omega = \omega_\phi + \dots$ (комплексной фазовой скорости) для системы уравнений

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= -\gamma - \gamma + \alpha \omega_\phi + \dots \\ \omega + \omega_\phi &= -\alpha + \dots \end{aligned}$$

$$\Omega_\phi = \alpha\omega + \dots \quad (6)$$

$$\Omega_\phi = \alpha\omega_\phi + \dots$$

$$\Omega = \alpha\omega + \dots$$

$$\frac{(\omega)'}{\omega} = -\gamma\omega_\phi - \alpha\omega,$$

$$\frac{(\omega_\phi)'}{\omega_\phi} = -\gamma_\phi - \alpha,$$

$$\omega = \alpha(\dots) + \dots + \frac{\alpha}{\dots}, \quad \Omega = \alpha(\dots) + \dots + \frac{\alpha}{\dots},$$

$\gamma = \dots$. Систему уравнений (6) после преобразований удобно представить в виде

$$\dots = \dots + \dots, \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma - \alpha \\ \dots \\ \gamma - \frac{\alpha(\dots - \frac{\Omega'}{\alpha} - \dots)}{\Omega} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \frac{\alpha}{\dots} \\ -\gamma & \dots & -\frac{\alpha}{\dots} \\ \dots & \dots & \frac{\Omega}{\alpha} \\ \dots & \dots & -\frac{\gamma}{\dots} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\gamma & -\alpha \\ \gamma & \dots & \dots \\ \alpha & \dots & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \frac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\omega = \dots, \quad \text{при } \dots = \xi \xi + \dots$$

Численный анализ. Спектральная задача (7), (8) решалась методом дифференциальной прогонки. При использовании данного метода исходная задача сводится к последовательности задач Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений F, вводимой следующим образом:

вблизи границ канала, далее прогонка ведется по схеме

$$(10)$$

навстречу со стыковкой в некоторой точке, где сформулировано дисперсионное соотношение

$$\left(+ () - - () \right) = , \quad (11)$$

где знаками «+» и «-» обозначены прогоночные соотношения, начатые от разных границ канала. Обычно в качестве точки стыковки выбирается критическая точка r_c , в которой $V_0(C) = X$.

Сначала рассмотрим зависимость критичес-

ких чисел Рейнольдса Re_c от P_m при фиксированном числе Гартмана. На рисунке 2 представлены графики таких зависимостей при $\xi = 0,25, m = 0$. Как и следовало ожидать, при малых P_m критические числа Рейнольдса при

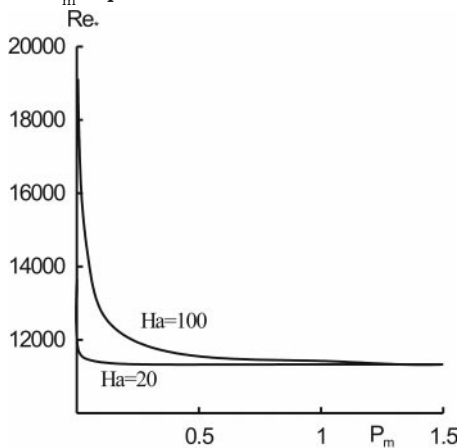


Рис. 2. Зависимости Re_c при $m = 0, \xi = 0,25$

$Na = 100$ намного больше, чем при $Na = 20$, и стремятся к разным значениям в предельном случае слабо проводящей жидкости. При увеличении P_m величины Re_c практически перестают зависеть от числа Гартмана и при $P_m \rightarrow \infty$ стремятся к значению, соответствующему случаю непроводящей жидкости. Это обусловлено тем, что напряженность магнитного поля входит в уравнение Навье-Стокса вместе с числом Альфвена, которое стремится к нулю при $P_m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим два предельных случая: непроводящей и хорошо проводящей жидкости. Соответствующие критические зависимости представлены на рисунках 3 и 4. При $\xi = 4$ зависимости $Re_c(\xi)$ для разных азимутальных мод почти сливаются, причем самой опасной

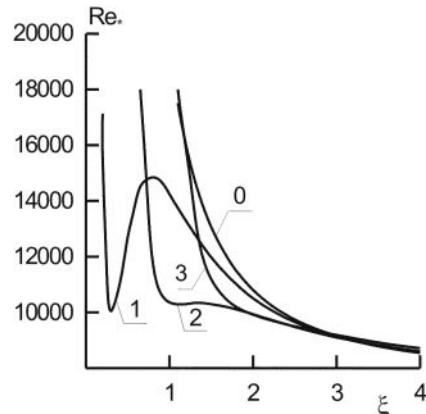


Рис. 3. Зависимости Re_c от ξ при $m = 0, 1, 2, 3$ для непроводящей жидкости

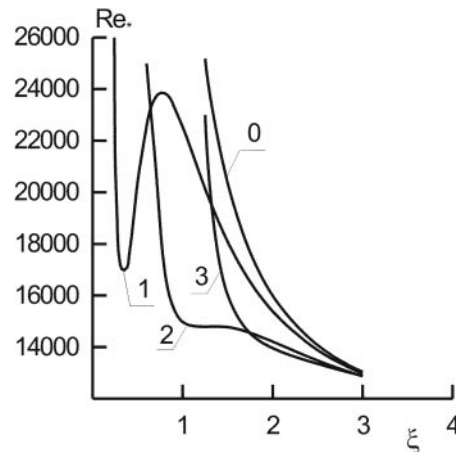


Рис. 4. Зависимости Re_c от ξ при $m = 0, 1, 2, 3$ для хорошо проводящей жидкости при $P_m = 10$ и $A = 0,01$

из них остается мода с $m = 0$. При уменьшении ξ критические числа Рейнольдса для $m = 2$ быстро возрастают. Поведение зависимостей $Re_c(\xi)$ для мод $m = 1$ и $m = 2$ более сложное. Эти зависимости имеют выраженный минимум при $\xi \approx 0,3$ и $\xi \approx 1,1$, который в определенных пределах слабо зависит от проводимости и величины внешнего магнитного поля. Как и следовало ожидать, при уменьшении ξ все критические зависимости быстро возрастают. На рисунке 5 представлены зависимости $Re_c(\xi)$ при $P_m = 0,4, A = 0,01$. При этих значениях параметров критические числа Рейнольдса существенно больше.

Зависимости критических чисел Рейнольдса от величины ξ представлены на рисунках 6 и 7 для случаев $\xi = 0,25$ и $\xi = 3$. При $P_m = 0$ графики для разных A сходятся к одной точке: для рисунка 6 – 9153, для рисунка 7 – 10269, что соответствует случаю непроводящей жид-

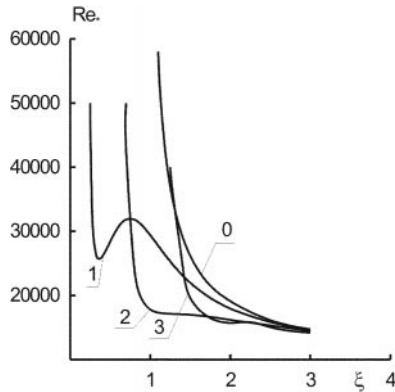


Рис. 5. Зависимости Re_* от ξ при $m = 0, 1, 2, 3$ для проводящей жидкости при $P_m = 0,4, A = 0,01$

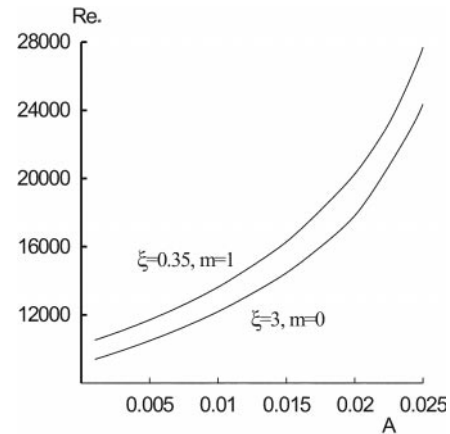


Рис. 8. Зависимости Re_* при $P_m = 0,001$

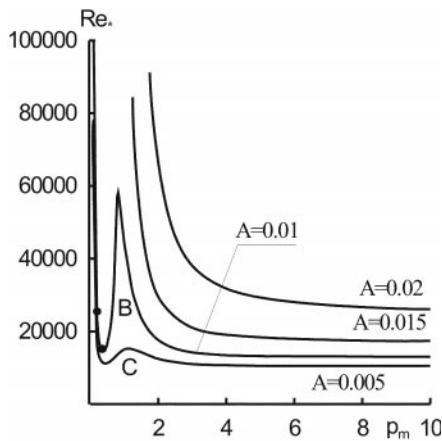


Рис. 6. Зависимости Re_* от P_m при $\xi = 3$ для разных A ($m = 0$)

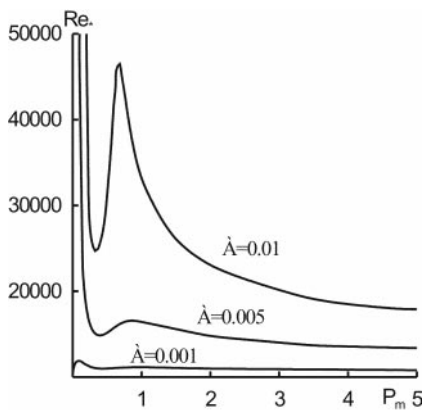


Рис. 7. Зависимости Re_* от P_m при $\xi = 0,35$ для разных A ($m = 1$)

кости (зависимости $Re_*(A)$ для близкого случая при $P_m = 0,001$ представлены на рисунке 8). При увеличении P_m функции $Re_*(P_m)$ имеют два максимума, а далее, при $P_m \rightarrow \infty$, стремятся к определенным постоянным величинам. Первый максимум изображен лишь на рисунке 7 для $A = 0,001$, а уже при $A = 0,005$ максимальное значение не помещается на приведенных графиках. Второго максимума меньше. Замечательно, что при $P_m \rightarrow \infty$ в (6) уравнения с магнитным полем отщепляются от основной системы, которая после этого соответствует системе для непроводящей жидкости, но с другими обозначениями:

$$D^* = D + \frac{A\alpha^2}{\Omega}, \quad V_0'^* = V_0' \left(1 + \frac{A\alpha^2}{\Omega} \right).$$

С рисунком 6 связан еще один интересный вопрос: точки В и С соответствуют одинаковым магнитным числам Рейнольдса – 5000, что приводит к так называемому перезамыканию нейтральных кривых, построенных при фиксированных P_m и A (см. [3]).

Выводы. Магнитное поле существенно стабилизирует рассмотренную систему. При промежуточных P_m движение более устойчиво, чем при $P_m = 0$ и $P_m \rightarrow \infty$. Для $\xi > 3$ критические зависимости для разных m практически сливаются.

Литература

1. Велихов Е.П. Устойчивость плоского Пуазейлева течения идеально-проводящей жидкости в продольном магнитном поле // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. №4.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, 1977.
3. Сагалаков А.М., Сидоров Г.С., Тюлюпин Е.Н. Устойчивость магнитогидродинамического течения Пуазейля в плоском канале с непроводящими стенками // Магнитная гидродинамика. 1989.