

Т.А. Кожуховская, Д.И. Попов, А.М. Сагалаков
**Нейтральные зависимости течений двухфазной
 жидкости между коаксиальными цилиндрами**

Введение. Проанализирована линейная устойчивость течения Пуазейля между коаксиальными цилиндрами гетерогенной жидкости по отношению к трехмерным возмущениям. В качестве базовой модели рассматривается бесстолкновительная монодисперсная смесь, описываемая уравнением Навье-Стокса для несущей фазы и уравнением переноса для частиц. Межфазное взаимодействие в смеси определяется силой Стокса. Такая система уравнений впервые была получена П. Саффменом, который поставил линейную задачу устойчивости для крупнодисперсной двухфазной несжимаемой жидкости [1].

Анализ линейной устойчивости проводился в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, времени релаксации и массовой концентрации частиц в зависимости от ширины зазора канала. При этом предполагались следующие допущения:

- Размеры частиц дисперсной фазы много больше молекулярно-кинетических размеров и длин свободного пробега молекул, что позволяет использовать классические представления и уравнения механики сплошных однофазных сред для описания процессов в масштабах самих неоднородностей, т.е. процессов внутри или около отдельных включений или неоднородностей.

- Размеры неоднородностей или включений много меньше средних масштабов L изменения характерных для потока величин, что позволяет описывать макроскопические процессы в смеси с помощью осредненных или макроскопических параметров.

- Смесь имеет следующую структуру: вторая, или дисперсная, фаза в каждом элементарном макрообъеме δV присутствует в виде сферических включений одинакового радиуса α ; при этом объемная концентрация ϕ дисперсной фазы мала.

- Размеры частиц предполагаются достаточно большими, чтобы можно было пренебречь энергией и другими эффектами хаотического и внутреннего движения дисперсных частиц. С точки зрения статистической физики дисперсная фаза может рассматриваться как «псев-

догаз», «псевдомолекулами» которого являются дисперсные частицы. Движение такого «псевдогаза» без пульсационного или хаотического движения частиц (тензор пульсационных напряжений дисперсной фазы равен нулю) может рассматриваться как «холодное» движение с нулевым давлением и нулевой температурой. При этом можно пренебречь вкладом парциального давления континуума частиц в полное давление смеси [2–3].

- Можно пренебречь непосредственным взаимодействием и столкновениями между частицами. Выполнение этого условия требует, чтобы $a/L \ll 1$, но с другой стороны $a/L \ll \phi$. Когда концентрация несущей фазы (число частиц в единице объема) превосходит концентрацию частиц, $n_f \gg n_p$, и $\rho_f \gg \rho_p$ (ρ_f – плотность жидкости, ρ_p – массовая концентрация частиц), полная вязкость смеси μ обусловлена несущей фазой, т.е. $\mu \approx \mu_f$, в то время как соответствующий перенос количества движения дискретной фазы осуществляется посредством диффузии через жидкость [4]. Отметим, что полная вязкость смеси учитывает поправку Эйнштейна $\mu = \mu_f(1 + 5/2\phi)$.

- Отсутствуют процессы дробления, слипания (коагуляции) и образования новых дисперсных частиц. Не рассматриваются межфазные переходы.

- Не рассматриваются эффект Магнуса и эффекты, обусловленные силами Бассе и силами, ускоряющими присоединенную массу частицы относительно жидкости. Считается, что относительное движение фаз происходит в Стоксовом режиме, а соответствующие локальные числа Рейнольдса для вращательного и сдвигового движений пренебрежимо малы. При стационарном движении в соседстве с твердой частицей находится один и тот же элемент жидкости, а поскольку размеры частицы достаточно малы, траектория частицы практически совпадает с линией тока.

В этих предположениях система уравнений, описывающих движение сильно разреженной крупнодисперсной бесстолкновительной двухфазной смеси, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_f + (V_f \nabla) V_f &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_f + \frac{f}{\text{SRe}} (V_p - V_f), \\ \nabla V_f &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f V_p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} V_p + (V_p \nabla) V_p &= \frac{1}{\text{SRe}} (V_f - V_p). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\text{Re} = U_0 L \rho_f / \mu$ – число Рейнольдса и $S = 2/9(a/L)^2 \rho_p^* / \rho_f$ – безразмерное время релаксации, где a – радиус частицы, L – ширина зазора между цилиндрами, U_0 – среднерасходная скорость, $f = M/\rho_f \cdot n_p$ – безразмерная массовая плотность континуума частиц, $M = 4/3\pi a^3 \cdot \rho_p^*$ – масса частицы, ρ_p^*, ρ_f – плотности материала частиц и несущей жидкости. Индексы f и p относятся соответственно к несущей жидкости и частицам.

Граничными условиями для частиц и для несущей жидкости будут условие непроницаемости границ и обычное условие прилипания на стенках канала

$$V_{p,n} \Big|_{\xi, \xi+1} = 0, \quad V_f \Big|_{\xi, \xi+1} = 0.$$

Линеаризуем систему (1) в окрестности стационарного решения. Будем рассматривать элементарные волновые решения в виде гармонического колебания

$$\left\{ w_{rk}(r), w_{\phi k}(r), w_{zk}(r), f_1(r), -iq(r)/(\alpha \text{Re}) \right\} \cdot \exp[i\alpha(z - ct) + im\varphi]$$

Здесь $w_{rk}(r)$, $w_{\phi k}(r)$, $w_{zk}(r)$ – компоненты комплексной амплитуды возмущения, $f_1(r)$ – возмущение плотности континуума частиц, $-iq(r)/(\alpha \text{Re})$ – возмущение давления, $\alpha \in (0, +\infty)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ – осевое и азимутальное волновые числа; $c = X + iY$ – собственное значение, где X – фазовая скорость возмущения, а αY – инкремент нарастания ($Y > 0$) или декремент затухания ($Y < 0$) возмущения; $k = f, p$.

Для удобства вычислений произведем следующую замену:

$$\begin{aligned} \Psi &= ir w_{f_1} / \alpha, \Phi = r w_{f_\phi}, \tilde{f} = r w'_{f_2}, w = w_{f_2}, \\ F &= (r w_{f_\phi})' / r = \Phi' / r \end{aligned}$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения радиальной структуры поля возмущений

$$\begin{aligned} w' - \tilde{f}/r &= 0, \quad \Psi' + m/(\alpha r) \cdot \Phi + r w = 0, \quad \Phi' - r F = 0, \\ q' - \alpha^2 m/(\alpha r) F - (\alpha^2/r) \tilde{f} + (\alpha^2/r) a \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F' + (2\alpha m/r^3) \Psi - (a/r) \Phi - m/(\alpha r) q &= 0, \\ \tilde{f}' - arw + i\alpha(\text{Re}U' + b) \Psi - r q &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} a &= i\alpha \text{Re}(U - c)(1 + fJ) + k^2, J^{-1} = \\ \text{где} \quad &= 1 + i\alpha S \text{Re}(U - c), k^2 = m^2/r^2 + \alpha^2 \quad \text{с граничными условиями} \\ \{w, \Psi, \Phi\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $b = f \text{Re} U' J^2$. При выводе системы (2) использовались стандартные обозначения и преобразования, приведенные в монографии [5]. Задача на собственные значения (2), (3) решалась численно методом дифференциальной прогонки.

Результаты численных расчетов. В результате расчетов было обнаружено, что нейтральные зависимости, определяющие области, в которых возмущения нарастают или затухают со временем, для различных спектральных азимутальных волновых чисел при фиксированном значении безразмерного радиуса внутреннего цилиндра образуют некоторую результирующую нейтральную кривую, имеющую ступенчатый вид (см., например, рисунок 1а, где изображены нейтральные зависимости при $\zeta = 1$, $f = 0,1$ и $S = 10^{-6}$ для различных спектральных азимутальных мод m , или рисунок 1б, на котором изображены нейтральные зависимости при $\zeta = 2,5$, $f = 0,1$ и $S = 1,56 \cdot 10^{-6}$). Причем с ростом номера моды нейтральные кривые смещаются в длинноволновую область (область меньших значений осевого волнового числа). Анализ нейтральных зависимостей показал, что при определенных значениях безразмерного радиуса внутреннего цилиндра наиболее опасными становятся несимметричные моды. На рисунке 1б наиболее опасной модой является мода $m = 3$, а на рисунке 1а – мода $m = 2$. Как видно из представленных графиков, при фиксированном небольшом значении внутреннего радиуса неустойчивыми могут оказаться только младшие азимутальные моды. Для произвольного не слишком большого значения радиуса внутреннего цилиндра количество неустойчивых мод ограничено.

По-видимому, наиболее сильное влияние геометрии течения проявляется в области $0,5 < \zeta < 3,5$, где происходит стабилизация практически всех высших азимутальных мод. При этом наиболее опасными возмущениями становятся моды $m = 1, 2, 3$. В области $0,5 < \zeta < 3,5$ структура мод $m = 1, 2, 3$ такова, что учет слагаемых, обусловленных зависимостью возмущения от азимутальной координаты, в урав-

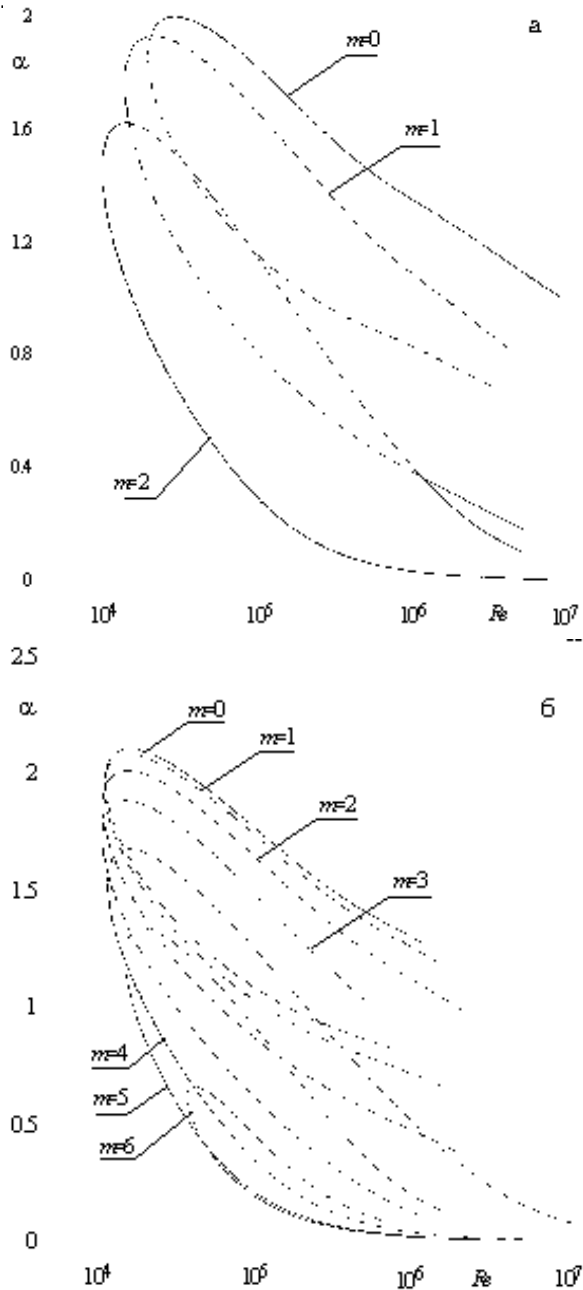


Рис. 1. Кривые нейтральной устойчивости при $f = 0.1$ для различных спектральных азимутальных мод: а - $\zeta = 1, S = 10^{-6}$; б - $\zeta = 2,5, S = 1,56 \cdot 10^{-6}$

нениях (3) приводит к увеличению мнимой части собственного значения. При этом те же слагаемые для мод $m > 3$ оказывают на величину собственного значения такое влияние, что соответствующие возмущения заметно стабилизируются.

Ранее произведенные расчеты показали, что критические зависимости определяются временем релаксации S и концентрацией частиц. Обнаружено, что добавление частиц может существенно повлиять на характер устойчивости, вид критических зависимостей и

поведение возмущений по сравнению со случаем однофазных течений [6–11]. Время релаксации S определяет сдвиг фазы между комплексными амплитудами скоростей частиц и жидкости. При соответствующих значениях S колебания жидкости и частиц могут взаимно раскачивать друг друга, либо, наоборот, твердые частицы могут оказывать демпфирующее влияние. Наилучшая стабилизация происходит при $SRe \sim 1$, что, по-видимому, обусловлено резонансным характером стабилизации. Добавление частиц с размерами, соответствующими таким значениям времени релаксации, приводит к сильной диссипации энергии возмущения в потоке. Для случая, когда параметр $SRe \ll 1$, в работе [1] показано, что соответствующее течение двухфазной среды можно рассматривать как течение однородной жидкости с эффективной плотностью $\rho(1 + f)$ или числом Рейнольдса $(1 + f)Re$, а увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению устойчивости. Если же размер частиц велик настолько, что $SRe \gg 1$, то задача о возмущениях в двухфазной жидкости сводится к аналогичной задаче в однородной среде, но с большей скоростью нарастания возмущений. Поэтому добавление крупнодисперсных частиц приводит к стабилизации потока. Необходимо отметить, что параметр SRe определяет отношение характерного времени выравнивания скорости частицы относительно скорости жидкости за счет силы Стокса к характерному масштабу времени для потока.

На рисунке 2 приведены графики нейтральных зависимостей для моды $m = 3$ при $\zeta = 25$ для различных значений массовой концентрации частиц и времени релаксации. Для «умеренной» концентрации картина устойчивости непосредственно определяется временем релаксации, причем при увеличении размера частиц происходит не только смещение нейтральных кривых в сторону больших или меньших чисел Рейнольдса, но и заметная деформация нейтральных кривых.

При «умеренных» и больших концентрациях частиц наблюдается «перезамыкание» ветвей нейтральных зависимостей и образование двух областей нейтральной кривой [8]. Причем в случае малых спектральных азимутальных номеров при уменьшении радиуса внутреннего цилиндра области нейтральной кривой стягиваются и исчезают, либо смещаются в область больших значений чисел Рейнольдса. Расчеты показали, что в случае моды $m = 10$ «перезамыкание» пропадает при уменьшении радиуса внутреннего цилиндра (см. рисунок 3а,

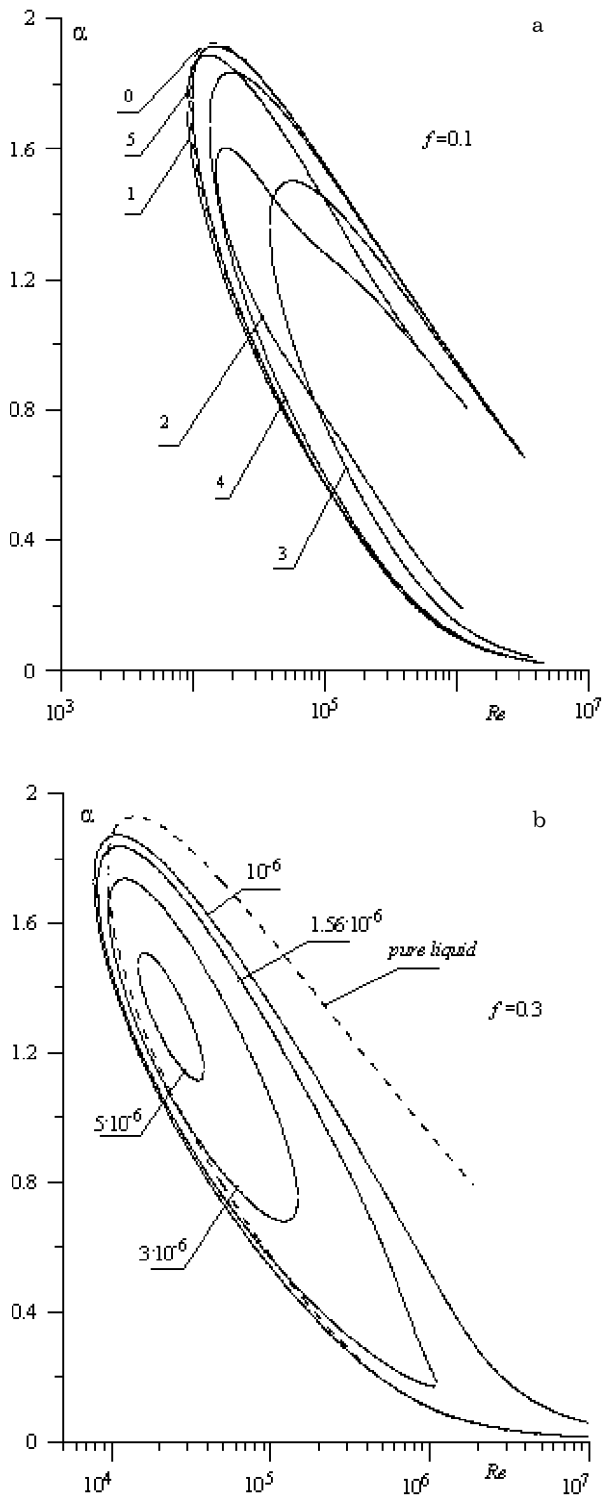


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости для моды $m = 3$ при различных значениях S , $\zeta = 2,5$. Цифрами у кривых (b) обозначены следующие значения времени релаксации:
 0 - чистая жидкость; 1 - $S = 10^{-6}$;
 2 - $S = 10^{-5}$; 3 - $S = 10^{-4}$;
 4 - $S = 10^{-3}$; 5 - $S = 10^{-2}$

на котором изображены нейтральные зависимости при значениях $\zeta = 5, 10, 50$, $f = 0,3$ и $S = 1,56 \cdot 10^{-6}$ для моды $m = 10$). На рисунке 3b изображены нейтральные зависимости в случае моды $m = 0$ для различных ζ при $S = 1,56 \cdot 10^{-6}$. Эти зависимости демонстрируют изменение формы нейтральной кривой при уменьшении радиуса внутреннего цилиндра в случае осесимметричной моды. Из данного графика также видно, что область (a) нейтральной кривой при уменьшении радиуса стягивается и исчезает, а область (b) смещается в сторону больших чисел Рейнольдса.

На рисунке 4 приведены зависимости критического числа Рейнольдса от величины времени релаксации для мод $m = 0, 1, 2, 3$ при различных f . По мере увеличения f кривая $Re_*(S)$ деформируется, сохраняя первоначально свой вид с одним максимумом (кривая 1 на рисунке 4a). При этом максимум смещается в сторону уменьшения S . Однако, начиная с определенного значения $f = f_*$ (которое определяется условиями $dS/dRe_* = 0$, $d^2S/dRe_*^2 = 0$), характер кривой $Re_*(S)$ меняется. На кривой появляется область, границы которой определяются условием $dRe_*/dS = \infty$. Внутри этой области расположена точка перегиба. Подобный вид кривой соответствует эффекту «перезамыкания» ветвей нейтральных зависимостей. Замечательной особенностью при этом является возникновение «скачкообразного» характера стабилизации. Так, при постепенном увеличении времени релаксации соответствующее критическое число Рейнольдса будет возрастать. В точке А (см. рис. 4a) значение Re_* скачком возрастет до В и затем будет непрерывно изменяться вдоль ВК. Отметим, что в точке А существует всего лишь одно нейтральное возмущение с определенными характеристиками, что соответствует случаю, когда нейтральная зависимость вырождается в точку. При этом в спектре возмущений имеется выделенная локальная незатухающая гармоника. Участок кривой EA, изображенный на рисунке пунктирной линией, соответствует случаю, когда нижняя ветвь нейтральной кривой «перезамыкается» с верхней ветвью. При этом в точке E зависимости $Re_*(S)$ «перезамыкание» происходит впервые. При дальнейшем увеличении f у зависимости $Re_*(S)$ появляются два максимума. На рисунке изображены вспомогательные кривые $SRe_* = 1$ и $SRe_* = \pi/2$. Видно, что точки, в которых впервые происходит «перезамыкание», и максимумы зависимостей Re_* от S для различных f располагаются в некоторой окрестности от этих кривых.

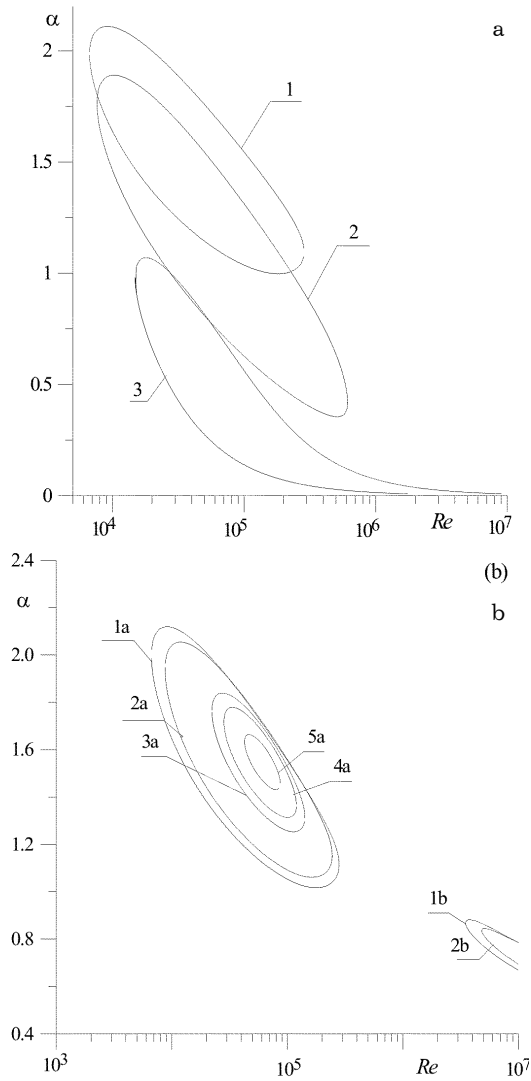


Рис. 3. Изменение формы кривой нейтральной устойчивости при уменьшении радиуса при $f = 0,3$ и $S = 1,56 \cdot 10^{-6}$.

Численные результаты а - для моды $m = 10$: 1 - $\zeta 50,2$; 2 - $\zeta 10,3$; 3 - $\zeta 5$. (b);
 б - для моды $m = 0$ (b): 1 - $\zeta 50,2$;
 2 - $\zeta 2,5$; 3 - $\zeta 1$; 4 - $\zeta 0,9$; 5 - $\zeta 0,8$

При этом форма зависимостей критического числа Рейнольдса от времени релаксации такова, что при увеличении f область EABD деформируется вдоль кривой, для которой выполняется $SRe_* \sim 1$. По-видимому, такая особенность обусловлена резонансным характером стабилизации, определяемым связью между компонентами комплексных амплитуд скоростей возмущений

$$\begin{aligned} w_{rp} &= Jw_{rf}, w_{fp} = Jw_{fi}, \\ w_{rp} &= Jw_{zf} - J^2 U' S R w_{rf}, \\ J^{-1} &= 1 + i\alpha ReS (U - c). \end{aligned}$$

Для мод $m = 2, 3$ с ростом f происходит заметное увеличение значений $Re_*(S)$ в окрестности максимумов.

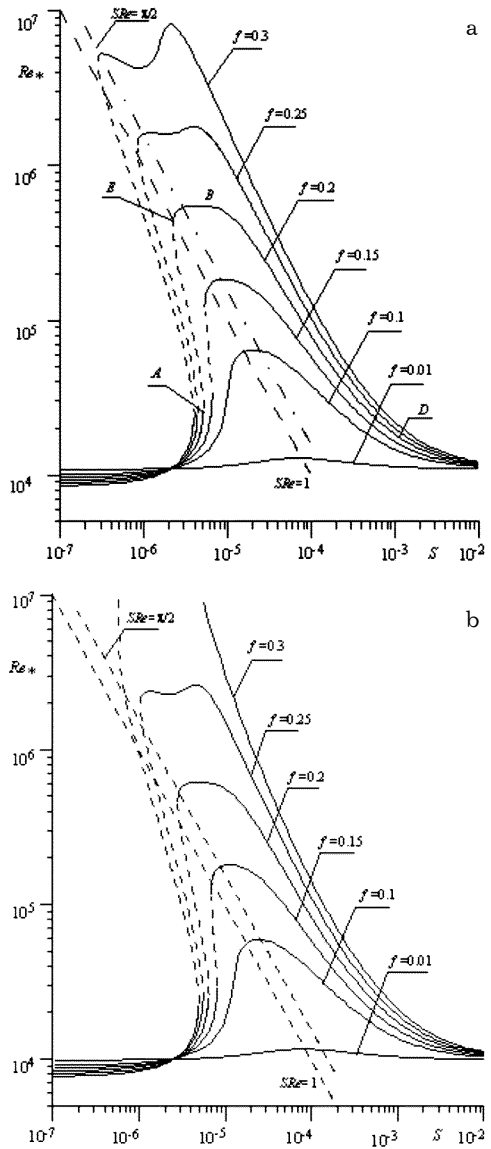


Рис. 4. Зависимости критического числа Рейнольдса от величины времени релаксации для различных f при $\zeta = 2$;
 а - для моды $m = 0$, б - для моды $m = 2$

Произведенные расчеты подтвердили тот факт, что в случае течений между коаксиальными цилиндрами недостаточно ограничиваться рассмотрением только осесимметрических возмущений, поскольку существуют области значений радиуса внутреннего цилиндра, при которых наиболее опасными становятся младшие азимутальные моды $m = 1, 2, 3$. Моды же с номерами $m > 3$ являются менее опасными для всех значений внутреннего радиуса. С ростом внутреннего радиуса картина устойчивости становится схожей со случаем плоскопараллельных течений, а при уменьшении радиуса происходит постепенная стабилизация высших азимутальных мод.

Литература

1. Saffman P.G. On the stability of laminar flow of a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 13, Pt 1. 1962.
2. Нигматули Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., 1987.
4. Соу С.Л. Гидродинамика многофазных систем. М., 1975.
5. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, 1977.
6. Kryukov A.A., Sagalakov A.M. Linear stability of a parallel two-phase flow between coaxial cylinders, Bourgas' 2001, 6th workshop «Transport Phenomena in two-phase Flow», 83–89. 2001
7. Kozhukhovskaya T.A., Kryukov A.A., Sagalakov A.M., Yudintsev A.Yu. Stability of parallel flow of a two-phase liquid between coaxial cylinders // *Russian J. Eng. Thermophys.* 2000. Vol. 10. №2.
8. Rudyak V.Y., Isakov E.B. Stability of Heterogeneous Media. I. Stability of Plane Poiseuille Flow, Preprint 2(4). Novosibirsk, 1994.
9. Кожуховская Т.А., Попов Д.И., Сагалаков А.М. Устойчивость двухфазных параллельных течений между коаксиальными цилиндрами // Теория и приложения задач со свободными границами: Тез. докл. конф. Барнаул, 2002.
10. Кожуховская Т.А., Крюков А.А., Попов Д.И. Устойчивость напорного течения монодисперсной смеси в канале кольцевого сечения // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики: Тез. докл. VII-й Всерос. конф. молодых ученых. Новосибирск, 2002.
11. Kozhukhovskaya T.A., Sagalakov A.M., Popov D.I. Neutral relations for the parallel flow of a two-phase fluid between coaxial cylinders, Bourgas' 2002, 7th workshop «Transport Phenomena in two-phase Flow», 2002.