

Г.И. Алгазин, Ю.Г. Алгазина  
**Базисные задачи товарных рынков  
 с торговыми посредниками\***

Микроэкономическая модель функционирования товарных рынков с торговыми посредниками, которая в достаточно общей постановке приведена в работе [1], дает возможность описать целую область допустимых компромиссных состояний. Выбор из этой области в качестве решения модели рынка является неоднозначным с позиций интересов отдельных субъектов рыночных отношений: потребителей, производителей и посреднических звеньев. Под допустимым понимается состояние рынка, для которого выполняются соотношения баланса спроса и предложения по каждому товару  $j$

$$q_j^d = \sum_{k=1}^{\ell} q_{kj}^d = \sum_{i=1}^m q_{ij}^s = q_j^s, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Здесь  $q_{kj}^d$  – объем спроса на товар  $j$  потребителя с индексом  $k$  ( $k = \overline{1, \ell}$ );  $q_{ij}^s$  – объем предложения товара  $j$  производителем  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ );  $q_j^d$  – совокупный объем спроса потребителей на товар  $j$ ;  $q_j^s$  – совокупный объем предложения производителей товара  $j$ .

Для получения устойчивых компромиссов, т.е. исключающих экономические мотивы их изменения со стороны субъектов рынка и любых их коалиций, условия (1) необходимо дополнить формальными правилами выбора компромиссных состояний. В качестве возможных таких правил могут рассматриваться правила относительно поведения и информированности субъектов рынка (как, например, в [2]), правила распределения приоритетов между субъектами рынка в выборе управлений (параметров) рынка  $p^d$ ,  $p^s$  и  $q$  [3] и т.п. (обозначено  $p^s = (p_1^s, \dots, p_n^s)$  и  $p^d = (p_1^d, \dots, p_n^d)$  – вектора цен предложения и спроса, соответственно;  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , где  $q_j = q_j^d = q_j^s$ ). При этом отличительная особенность поиска в области допустимых компромиссов состоит в том, что параметры  $p^d$ ,  $p^s$  и  $q$  посредством моделей по-

ведения субъектов в системе рыночных отношений связаны между собой так, что по значениям одних можно пытаться находить значения других. Далее рассмотрим, как подобные задачи решаются при предположениях, обычных для литературы по микроэкономике рынков.

Полагается, что определяемые по моделям поведения потребителей функции спроса зависят от системы цен  $(p_j^d)$ , по которым товары закупаются у посредника, и от доходов потребителей  $(I_k)$ , т.е.

$$q_{kj}^d = q_{kj}^d(p_1^d, \dots, p_n^d, I_k) \quad (2)$$

Функции предложения определяются через систему цен  $(p_j^s)$ , по которым товары поставляются производителями посреднику, и финансовый ресурс производителя  $(G_i)$ , т.е.

$$q_{ij}^s = q_{ij}^s(p_1^s, \dots, p_n^s, G_i) \quad (3)$$

Полагаем также, что совокупный доход  $(I)$  потребителей полностью тратится на закупку товаров у посредника, а именно

$$\sum_{j=1}^n p_j^d \cdot q_j^d = \sum_{j=1}^n p_j^d \cdot \sum_{k=1}^{\ell} q_{kj}^d = \sum_{k=1}^{\ell} I_k = I; \quad (4)$$

совокупный финансовый ресурс  $(G)$  производителей получен в результате продажи товаров посреднику, что определяется соотношением

$$G = \sum_{i=1}^m G_i = \sum_{j=1}^n p_j^s \cdot q_j^s = \sum_{j=1}^n p_j^s \cdot \sum_{i=1}^m q_{ij}^s. \quad (5)$$

Тогда в зависимости от того, какие из величин  $p^d$ ,  $p^s$  и  $q$  заданы, можно выделить три основные задачи для товарных рынков с посредником.

Задача 1. Заданы цены  $p_j^d$ . Требуется определить цены  $p_j^s$ , объемы рыночных сделок по

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-06-80228) и Российского гуманитарного научного фонда.

каждому товару  $q_j$  и результаты деятельности каждого из субъектов рынка.

Решение данной задачи разобьем на следующие этапы:

1) определяем по функциям спроса (2) количество закупаемых у посредника товаров потребителями –  $q_{kj}^d = q_{kj}^d(p_1^d, \dots, p_n^d, I_k)$ ;

2) находим объем совокупного спроса потребителей на товары  $q_j^d$  и полагаем, используя условия баланса (1), что  $q_j^s = q_j^d$ ;

3) из системы уравнений

$$q_j^s = \sum_{i=1}^m q_{ij}^s(p_1^s, \dots, p_n^s, G_i) = q_j^d \text{ находим цены}$$

предложения  $p_j^s$ ;

4) определяем объемы предложения каждого производителя  $q_{ij}^s$ ;

5) определяем значения функции полезностей потребителей, прибыль производителей и посредника.

Рассмотрим следующий пример рынка двух товаров с посредником, на котором также действуют два производителя (каждый поставляет только один товар) и два потребителя (каждый из них потребляет два товара).

Пусть прибыль производителей задана выражениями:

$$\Pi_1(q) = p_1 q - c_1(q), \quad \Pi_2(q) = p_2 q - c_2(q).$$

Здесь  $c_1(q)$  и  $c_2(q)$  – функции минимальных

издержек. Положим, что  $c_1(q) = 130000 + \frac{1}{20}q^2$

и  $c_2(q) = 100000 + \frac{1}{80}q^2$ .

Для нахождения функции предложения приравняем к нулю производную:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q} = p_1 - \frac{1}{10}q = 0 \text{ и } \frac{\partial \Pi_2}{\partial q} = p_2 - \frac{1}{40}q = 0.$$

$$\text{Имеем: } q_1^s = 10p_1^s \text{ и } q_2^s = 40p_2^s. \quad (6)$$

Таким образом, совокупный доход производителей равен:

$$G = p_1^s q_1^s + p_2^s q_2^s = 10(p_1^s)^2 + 40(p_2^s)^2.$$

Далее пусть функции полезности потребителей имеют вид:

$$u_1(q_1, q_2) = 4 \ln q_1 + \ln q_2; \\ u_2(q_1, q_2) = \ln q_1 + \ln q_2.$$

Решение задачи оптимального выбора дает следующие выражения для функций спроса:

$$q_{11}^d = 0,8 \cdot \frac{I_1}{p_1^d}, \quad q_{12}^d = 0,2 \cdot \frac{I_1}{p_2^d}, \\ q_{21}^d = 0,5 \cdot \frac{I_2}{p_1^d}, \quad q_{22}^d = 0,5 \cdot \frac{I_2}{p_2^d}. \quad (7)$$

Пусть доходы первого и второго потребителя составляют:

$$I_1 = 0,61 \text{ и } I_2 = 0,41. \quad (8)$$

Выписываем условия согласования спроса и предложения:

$$10p_1^s = 0,8 \cdot 0,6 \cdot \frac{I}{p_1^d} + 0,5 \cdot 0,4 \cdot \frac{I}{p_1^d} = 0,68 \frac{I}{p_1^d}; \\ 40p_2^s = 0,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{I}{p_2^d} + 0,5 \cdot 0,4 \cdot \frac{I}{p_2^d} = 0,32 \frac{I}{p_2^d}. \quad (9)$$

Вернемся к рассмотренным выше этапам решения задачи 1.

Решение первого этапа дают выражения (7) для функций спроса  $q_{11}^d, q_{12}^d, q_{21}^d, q_{22}^d$  и соотношения доходов потребителей (8). Далее

$$q_1^d = q_{11}^d + q_{21}^d = 0,68 \frac{I}{p_1^d} \text{ и} \\ q_2^d = q_{12}^d + q_{22}^d = 0,32 \frac{I}{p_2^d} \quad (10)$$

Из равенств (9) находим цены предложения

$$p_1^s = 0,068 \frac{I}{p_1^d}, \quad p_2^s = 0,008 \frac{I}{p_2^d}$$

Далее определяем результаты субъектов рынка.

Прибыль первого производителя составит:

$$\Pi_1 = \frac{1}{10} \left(0,68 \frac{I}{p_1^d}\right)^2 - 130000 - \frac{1}{20} \left(0,68 \frac{I}{p_1^d}\right)^2 = \\ = 0,02312 \frac{I^2}{(p_1^d)^2} - 130000$$

Прибыль второго производителя:

$$\Pi_2 = \frac{1}{40} \left(0,32 \frac{I}{p_2^d}\right)^2 - 100000 - \frac{1}{80} \left(0,32 \frac{I}{p_2^d}\right)^2 = \\ = 0,00128 \frac{I^2}{(p_2^d)^2} - 100000.$$

Прибыль посредника:

$$R = I - p_1^s q_1^s - p_2^s q_2^s =$$

$$= I - 0,04624 \frac{I^2}{(p_1^d)^2} - 0,00256 \frac{I^2}{(p_2^d)^2}.$$

Значение функции полезности для первого потребителя составит:

$$u_1 = 4 \ln 0,68 + \ln 0,32 + 4 \ln \frac{I}{p_1^d} + \ln \frac{I}{p_2^d} =$$

$$= \ln 0,06842 + 5 \ln I - 4 \ln p_1^d - \ln p_2^d.$$

Соответственно для второго потребителя –  $u_2 = \ln 0,2176 + 2 \ln I - \ln p_1^d - \ln p_2^d$ .

Задача 2. Заданы цены  $p_j^s$ . Требуется определить цены  $p_j^d$ , объемы рыночных сделок  $q_j$  и результаты каждого из субъектов рынка.

Решение данной задачи можно также представить в виде последовательности этапов:

1) определяем предложения производителей товаров на рынке  $q_{ij}^s = q_{ij}^s(p_1^s, \dots, p_n^s, G_i)$ ;

2) определяем совокупное предложение товаров  $q_j^s$ . Полагаем, что объем спроса равен объему предложения, т.е.  $q_j^d = q_j^s$ ;

3) решая систему уравнений

$$q_j^d = \sum_{k=1}^{\ell} q_{kj}^d(p_1^d, \dots, p_n^d, I_k) = q_j^s, \text{ находим}$$

цены спроса товаров  $p_j^d$ ;

4) определяем объемы спроса каждого потребителя при ценах  $p_j^d$ , полученных на этапе 3 данного алгоритма;

5) определяем результаты участников рынка.

По данным рассмотренного выше примера выражения для функций спроса и предложения товаров  $q_1^s$  и  $q_2^s$  дают соотношения (6).

Используя условия равенства объемов спроса и предложения и выражение (7) для функций

спроса, получим  $p_1^d = 0,068 \frac{I}{p_1^s}$  и

$$p_2^d = 0,008 \frac{I}{p_2^s}.$$

Определяем результаты участников рынка. Прибыль первого производителя:

$$\Pi_1 = 10(p_1^s)^2 - 130000 - \frac{1}{20} \cdot 100 \cdot (p_1^s)^2 =$$

$$= 5(p_1^s)^2 - 130000.$$

Прибыль второго производителя:

$$\Pi_2 = 40(p_2^s)^2 - 100000 - \frac{1}{80} \cdot 1600 \cdot (p_2^s)^2 =$$

$$= 20(p_2^s)^2 - 100000.$$

Прибыль посредника:  $R = I - 10(p_1^s)^2 - 40(p_2^s)^2$ .

Значение функции полезности первого потребителя:

$$u_1 = 4 \ln 10 + 4 \ln p_1^s + \ln 40 + \ln p_2^s =$$

$$4 \ln 10 + \ln 40 + 4 \ln p_1^s + \ln p_2^s.$$

Значение функции полезности второго потребителя составит:

$$u_2 = \ln 400 + \ln p_1^s + \ln p_2^s.$$

Задача 3. Заданы согласованные совокупные объемы спроса и предложения товаров –  $q_j$ . Требуется определить цены спроса  $p_j^d$  и предложения  $p_j^s$ , а также результаты, которые получают участники на этом рынке.

Поэтапное решение этой задачи имеет следующий вид:

1) из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^m q_{ij}^s(p_1^s, \dots, p_n^s, G_i) = q_j \text{ находим цены}$$

предложения товаров  $p_j^s$ ;

2) из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{\ell} q_{kj}^d(p_1^d, \dots, p_n^d, I_k) = q_j \text{ находим цены}$$

спроса на товары  $p_j^d$ ;

3) определяем результаты участников рынка.

Рассмотрим ход решения этой задачи по данным прежнего примера.

По функциям предложения имеем  $p_1^s = \frac{q_1}{10}$

$$\text{и } p_2^s = \frac{q_2}{40}.$$

По функциям спроса получаем

$$0,68 \frac{I}{p_1^d} = q_1 \text{ и } 0,32 \frac{I}{p_2^d} = q_2.$$

$$\text{Тогда } p_1^d = 0,68 \frac{I}{q_1} \text{ и } p_2^d = 0,32 \frac{I}{q_2}.$$

Прибыль первого производителя составит:

## Базисные задачи товарных рынков с торговыми посредниками

$$\Pi_1 = \frac{q_1^2}{10} - 130000 - \frac{q_1^2}{20} = \frac{1}{20} \cdot q_1^2 - 130000$$

Прибыль второго производителя:

$$\Pi_2 = \frac{q_2^2}{40} - 100000 - \frac{q_2^2}{80} = \frac{1}{40} \cdot q_2^2 - 100000.$$

$$\text{Прибыль посредника: } R = I - \frac{1}{10} q_1^2 - \frac{1}{40} q_2^2.$$

Полезность первого потребителя:

$$u_1 = 4 \ln q_1 + \ln q_2.$$

Полезность второго потребителя:

$$u_2 = \ln q_1 + \ln q_2.$$

## Литература

1. Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Моделирование систем обмена товарами с торговым посредником // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Материалы X Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2002.

2. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М., 1982.

3. Алгазин Г.И. Математические модели системного компромисса. Барнаул, 1999.