П.И. Кузьмин

Использование модели В. Леонтьева в динамической задаче оперативного планирования объемов затрат и выпуска продукции

Существующие методы анализа финансовой деятельности предприятий [1] основываются на анализе основных интегральных (статических) показателей за некоторый период времени (год, квартал), поэтому задача оперативного планирования (управления) фактически остается в стороне. Однако быстрое развитие информационных технологий позволяет вновь вернуться к постановкам задач, алгоритмы решения которых не разрабатывались из-за ограничений большой размерности [2], и при возникновении подобных ограничений использовать снова методы декомпозиции и агрегирования [3]. В работе исследуется проблема оперативного планирования объемов затрат и выпуска продукции предприятия, производящего небольшое количество видов продуктов, например, подсолнечное масло. Аналогичная проблема, названная задачей синхромаркетинга, заключающейся в согласовании во времени интенсивности спроса, производства и реализации продукции, рассмотрена в работе С.В. Жака «Математические модели менеджмента и маркетинга» [4]. Таким образом, сформулируем основную задачу: найти наилучшие способы выбора интенсивностей производственных способов при заданных функциях спроса q(t) и объеме ресурсов S(t), где $t = 0, 1, N\text{-}1$ - номер временного интервала длительностью Δt, на которые разбит интервал – плановый период T. Вектор переменных ресурсов (в том числе запасов) $\vec{S}(t)$ распадается на входные переменные запасов (в том числе комплектующих)

$$\vec{S}^{\text{вх}}(t) = (S_1^{\text{вх}}(t),...,S_{m1}^{\text{вх}}(t))^T \ ;$$

и на выходные переменные запасов

$$\vec{S}^{\text{вых}}(t) = (S_1^{\text{вых}}(t),...,S_{m\,2}^{\text{вых}}(t))^T \ ,$$

где m1 – количество входных видов ресурсов, m2 – количество выходных видов продукции.

Уравнения состояния выглядят следующим образом:

$$\vec{S}^{\text{вх}}(t+1) = \vec{S}^{\text{вх}}(t) - \vec{a}(t) + \vec{q}(t), \quad t = 0,...,N-1 \tag{1}$$

и

$$\vec{S}^{\text{вых}}(t+1) = \vec{S}^{\text{вых}}(t) + \vec{y}(t) - \vec{r}(t), \quad t = 0,...,N-1, \tag{2}$$

где $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t),..., a_{m1}(t))^T$ –вектор производственных затрат входных запасов, в том числе комплектующих на t-м интервале времени; $\vec{y}(t) = (y_1(t),..., y_{m2}(t))^T$ – вектор выпуска продукции на t-м интервале времени; $\vec{q}(t) = (q_1(t),..., q_{m1}(t))^T$ – объем внешних поставок входных запасов на t-м интервале времени; $\vec{r}(t) = (r_1(t),..., r_{m2}(t))^T$ – объем реализации выходной продукции на t-м интервале времени.

В работе [2] отмечено, что затраты и выпуск связаны с интенсивностями производственных способов заданными (вообще говоря, нелинейными) зависимостями:

$$\vec{a}(t) = A_t[\vec{x}(t)]; \tag{3}$$

$$\vec{y}(t) = B_t[\vec{x}(t)] \ , \tag{4}$$

где $\vec{x}(t)$ – время (интенсивность) работы агрегатов.

Здесь уместно применить модели В.В. Леонтьева, используемые на уровне предприятия [5]. Для этого вектор производственных затрат входных запасов $\vec{a}(t)$ и вектор выпуска продукции $\vec{y}(t)$ на t-м интервале времени свяжем между собой некоторым преобразованием нормативных коэффициентов.

$$\vec{y}(t) = F_t[\vec{x}(t), \vec{a}(t)] \tag{5}$$

Рассмотрим последнее выражение более подробно. Поскольку завод состоит из цехов, то имеет место пространственно-временная структура. В работе [2] в качестве вектора неизвестных переменных интенсивности способов производства, измеряемые в часах (время работы агрегатов на каждом временном интервале). Нами в качестве вектора неизвестных переменных берется вектор валовых выпусков $\vec{x}_k(t)$ цехов за интервал времени Δt. Так как конечную продукцию могут произвести несколько цехов, то выражение (5) распадается на системы уравнений с блочными матрицами.

Валовый выпуск k-го цеха $\vec{x}_k(t)$ за интервал времени Δt распадается на две части: на производственное потребление во всех цехах (внутрипроизводственное потребление) и на конечное (непроизводственное) потребление. Внутрипроизводственное потребление i-го продукта равно $\sum_{j=1}^{Nk} d_{kj}\vec{x}_j(t)$, поэтому чистый выпуск продуктов k-го цеха составит

$$\vec{x}_k - \sum_{j=1}^{Nk} d_{kj}\vec{x}_j(t), \quad i = 1, N_{\text{цехов}},$$

где Nk – количество потребляемых k-м цехом видов ресурсов; Nцехов – количество цехов завода.

Если приравнять чистый выпуск каждого продуктов каждого цеха и вектор его конечного выпуска $\vec{y}_k(t)$, то получится система уравнений

$$\vec{x}_k(t) - \sum_{j=1}^{Nk} d_{kj}\vec{x}_j(t) = \vec{y}_k(t), \quad (k = 1, \ldots, N_{\text{цехов}}), \tag{6}$$

которая и составляет модель В. Леонтьева. Здесь приняты следующие обозначения:

$D_k(t) = (d_{k,j}(t))$ – матрица расходных коэффициентов (прямых затрат) количества тех единиц продукции i-го цеха, которые используются как сырье («промежуточный продукт») для выпуска соответствующей единицы продукции k-го цеха; $\vec{y}_k(t)$ – подвектор вектора выпуска $\vec{y}(t)$, который относится к k-му цеху, т.е. является в этом смысле конечным вектором выпуска всего завода.

Для определения валового выпуска цехов $\vec{x}_k(t)$ из уравнения (6) имеем

$$\vec{x}_k(t) = (E - D_k(t))^{-1}\vec{y}_k(t), \quad (k = 1, \ldots, N_{\text{цехов}}), \tag{7}$$

при этом предполагается, что матрица расходных коэффициентов удовлетворяет условию продуктивности. Полагаем, что значения векторов искомого вектора валового выпуска цехов $\vec{x}_k(t)$ мы найдем, применив к формализуемой задаче обратный и прямой ход метода динамического программирования, считая при этом, что заданы вектор спроса $\vec{\sigma}(t)$, вектор объемов поставок (в том числе комлектующих) $\vec{q}(t)$ и соответствующий аддитивный критерий прибыли.

Виды ресурсов	I цех	II цех	III цех	Соответствующий вектор	Стоимость
Сырье 1	R_{11}^k	R_{12}^k	R_{13}^k	$\vec{a}_1^k(t)$	C_1
Сырье 2	R_{21}^k	R_{22}^k	R_{23}^k	$\vec{a}_2^k(t)$	C_2
Топливо	R_{31}^k	R_{32}^k	R_{33}^k	$\vec{a}_3^k(t)$	C_3
Трудоемкость	R_{41}^k	R_{42}^k	R_{43}^k		C_4

Дополнительно к данным формализуемой задачи укажем расходные нормы, например, двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующего цеха, трудоемкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1 чел.-час.

Нормы расхода

Суммарный расход сырья 1 можно получить, умножив соответствующую 1-ю строку таблицы (матрицы R) на вектор $\vec{x}_k(t)$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{цехов}}} R_{1j}^k * \vec{x}_{kj}(t),$$

и этот вектор должен быть равен затратам для $\vec{a}_1^k(t)$ k-го цеха

$$\vec{a}_1^k(t) = \sum_{j=1}^{N_{\text{цехов}}} R_{1j}^k * \vec{x}_{kj}(t). \tag{8}$$

Аналогично для других видов ресурсов имеем

$$\vec{a}_l^k(t) = \sum_{l=1}^{N_{\text{цехов}}} R_{lj}^k * \vec{x}_{kj}(t), \quad l = 1, \ldots, N_k. \tag{9}$$

Тогда естественное требование того, чтобы планируемые затраты были реализованы, налагают в силу (1) и (9) ограничение на выбор планового решения $\vec{x}_k(t)$ вида

$$\vec{a}_1^k(t) \le \vec{S}_{вх}^k(t) + \vec{q}^k(t), \quad (10)$$

где $\vec{S}_{вх}^k(t)$ – вектор входных ресурсов, относящихся к k-му цеху; $\vec{q}^k(t)$ – вектор внешних поставок, относящихся к k-му цеху.

Теперь рассмотрим структуру целевой функции, взяв за основу показатель прибыли за рассматриваемый период. Прибыль предприятия равна разнице между выручкой от реализации произведенной продукции и затратами, которые в свою очередь складываются из общезаводских издержек производства, издержек производства по цехам, амортизационных затрат и затрат на приобретение и хранение запасов:

$$\text{Прибыль} = \sum_{t=0}^{T-1}\left\langle \vec{r}_t, \vec{p}_t \right\rangle -$$

$$-\sum_{t=0}^{T-1}\left\langle (\vec{y}_t + \vec{S}_{t-1}^{вых}), \vec{\beta}_t \right\rangle - \sum_{t=0}^{T-1}\left\langle \vec{q}_t, \vec{\alpha}_t \right\rangle \to \max_{\vec{x}} , \quad (11)$$

где $\vec{p}_t$ – цены реализации на t-м интервале времени с учетом налога на добавленную стоимость с соответствующими вычетами на приобретенную продукцию, $\vec{r}_t$ – вектор реализованной продукции на t-м интервале времени; $\vec{\beta}_t$ – вектор затрат на хранение единицы продукции на t-м интервале времени; $\vec{q}_t$ – вектор внешних поставок (в том числе комплектующих) на t-м интервале времени; $\vec{\alpha}_t$ – вектор цен на приобретенную продукцию с учетом налога на добавленную стоимость на t-м интервале времени.

Максимально желаемым решением задачи оперативного планирования является получение правил, явно выражающих зависимость оперативных планов на любом временном интервале от состояния системы (объекта) на этом периоде времени. Здесь на помощь можно призвать выделение сезонных элементов векторов состояния системы, которые позволят отдельно выделить трендовые составляющие и временные компоненты.

Результатом работы является приведенная математическая постановка задачи оперативного управления производством при использовании модели В. Леонтьева.

Литература

1. Шеремет А.Д., Сайфуллин Р.С., Негашев Е.В. Методика финансового анализа. М., 2000.
2. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М., 1975.
3. Люблинский Р.Н., Оскорбин Н.М. Методы декомпозиции при оптимальном управлении непрерывными производствами. Томск, 1979.
4. Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. Ростов-на-Дону, 1997.
5. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика: Пер. с англ. / Под ред. А.Г. Гранберга. М., 1997.