УДК 532.5+536.2

А.А. Бочкарев, В.И. Волков

Модель Бринкмана с учетом неравномерной пористости

Характер движения жидкости через упакованные слои и определение перепада давления были предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. Так, в одной из первых работ Дарси была установлена линейная связь между перепадом давления и скоростью фильтрации. Сложная динамика течения в зернистых средах делает строгое теоретическое исследование объекта затруднительным, поэтому на практике приходится обращаться к эксперименту и различным идеализированным моделям. Две наиболее важные модели связаны с внутренним и внешним обтеканием частиц внутри зернистого слоя. Основная сложность в построении подобных моделей заключена в совмещении картины дискретного описания, характерного для зернистых сред, с картиной непрерывного описания сплошных сред с помощью уравнений Навье-Стокса. В обоих случаях аналитическое решение уравнений Навье-Стокса существует как закон Пуазейля и закон Стокса в вязком случае.

В настоящее время одной из распространенных моделей течения является канальная модель. Основное уравнение для вязкого режима течения, связывающее градиент давления со скоростью фильтрации и характеристиками среды, было получено Козени-Карманом. Бурке и Пламер записали подобное уравнение для турбулентного режима, и Эрган [1] объединил эти уравнения в одно, описывающее течение жидкости при одновременном воздействии вязких и инерционных сил:

$$\frac{\Delta p}{L} = 150\mu u_0 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 d^2} + 1{,}75\rho u_0^2 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 d}, (1)$$

где $\Delta p/L$ – полный перепад давления на длине L; u_0, ρ и μ – расходная скорость жидкости в пустом опытном участке, плотность и динамическая вязкость жидкости; ε – пористость слоя шариков диаметром *d*.

Недостатком модельных уравнений внутренней гидродинамики зернистого слоя, связывающих градиент давления со скоростью фильтрации, является то, что они справедливы для бесконечной среды и не дают локальных параметров, в частности локальной скорости вблизи стенки канала с упаковкой, знание которой очень важно для расчета аппаратов конечных размеров. В работе [2], по-видимому, впервые получили решение уравнения, в которое входила бы локальная скорость, с использованием уравнения Бринкмана [3], объединяющее закон Дарси и вязкий член:

$$\mu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 72T^2\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon d}\right)\mu U = \frac{\partial p}{\partial z}, (2)$$

где *T* – извилистость; *U* – продольная скорость; *z, x* – продольная и поперечная координаты.

Уравнение справедливо вблизи стенки на расстоянии одного диаметра и имеет решение в виде гиперболического косинуса, т.е. ядро с постоянной скоростью, которая резко падает у стенки упакованного слоя. Между тем известно, что стенка нарушает изотропность хаотичной укладки, что, в свою очередь, может влиять на распределение скорости в этой области. В уравнении же (2) пористость ε считается постоянной по всему сечению канала с засыпкой.

В предлагаемой работе приведено модельное решение уравнения Бринкмана с учетом влияния неравномерности проницаемости упаковки на профиль скорости жидкости вблизи стенки. При этом делаются следующие предположения:

1. У стенки хаотичной засыпки из шаров, как показывают эксперименты [4], формируется структура, близкая к кубической упаковке шаров.

2. Наибольшее искажение гидродинамической структуры может наблюдаться в пристеночной области зернистого слоя на расстоянии порядка диаметра элемента упакованного слоя, т.е. там, где пористость изменяется в наибольшей степени.

В расчетах Волкова, Анисимова пористость представлена в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\pi(R^2 - (R-h)^2)}{4R^2}, (3)$$

где *h* – расстояние от стенки ($h < 2R$).

Основываясь на экспериментах Аэрова [4] наиболее близко пористость можно представить в виде функции Бесселя.

$$-\varepsilon = 0{,}5J_0\left(6{,}634\frac{h}{d}+0{,}5\right)+0{,}4 \quad \text{(рис. 1).}$$

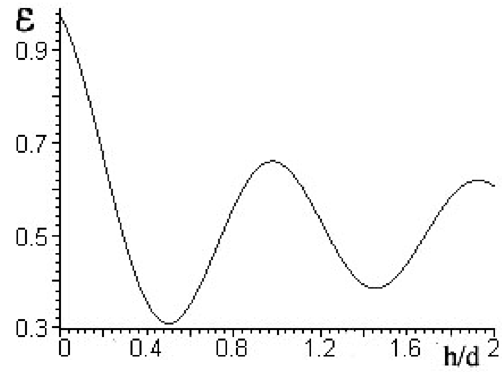

Рис. 1. Зависимость пористости от расстояния стенки

Делая замены $y = 3\left(\frac{h}{d}-\frac{1}{2}\right), k = \frac{d^2}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$,

получим уравнение (2) в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 112{,}5\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 U = k. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) было получено численно при граничных условиях:

$$U(0) = 0, \frac{dU(l)}{dy} = 0, \qquad (5)$$

l – полуширина канала с засыпкой.

Результат численного счета приведен на рисунке 2.

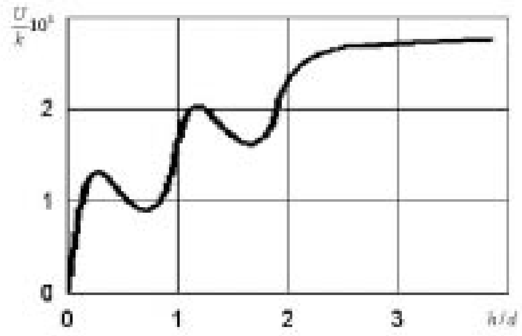

Рис. 2. Распределение продольной скорости в пристеночной области хаотичной засыпки в зависимости от поперечной координаты, отнесенной к диаметру шарика

Из графика видно, что максимальное значение скорости у стенки почти в три раза меньше скорости в центре канала. В связи с этим можно предположить, что увеличенное значение скорости потока у стенки упакованного слоя по сравнению с центром, наблюдаемое в некоторых экспериментальных работах, не связано непосредственно с увеличенной пористостью слоя вблизи стенки. К такому же выводу пришел Гольдштик в работе [5].

Выводы

Получено численное решение уравнения Бринкмана с учетом неравномерной пористости вблизи стенки канала, заполненного зернистой средой. Это решение позволяет более детально исследовать поведение потока жидкости вблизи стенки в зернистых средах.

Литература

1. Ergun S., Orning A.A. Chem. Eng. Progr., 1952, V. 48.

2. Мухин В.А., Смирнова Н.Н. Исследование процессов тепломассообмена при фильтрации в пористых средах: Препринт 26–78. Новосибирск, 1978.

3. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Sci. Res., 1947. Vol. A1.

4. Аэров М.Э., Тодес О.М., Наринский Д.А. Аппараты со стационарным зернистым слоем. Л., 1979.

5. Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск, 1984.