УДК 537.84

А.А. Крюков, А.М. Сагалаков, А.Ю. Юдинцев

Устойчивость двухфазной жидкости течения Пуазейля в трубе кольцевого сечения в моногармоническом приближении

В связи с задачами геофизической и магнитной гидродинамики большой интерес вызывает изучение завихренных движений жидкости, а также модель нелинейной теории гидродинамической устойчивости, которая описывается тремя гармоническими колебаниями. В ряде работ (см., например, [1, 2]) установлено, что после потери устойчивости основного потока возникают вторичные трехмерные автоколебательные режимы, которые приводят к деформации исходного профиля течения. На таком участке явления обусловлены нелинейным характером развития возмущений. После потери устойчивости ламинарных режимов наблюдается рост энергии пульсационного движения, что не способна объяснить линейная теория. Простейшее коллективное взаимодействие возмущений иллюстрирует набор трех гармонических колебаний.

В настоящее время одним из подходов для исследования течений, имеющих жесткий характер потери устойчивости, является применение эскалаторной схемы, предложенной в работе [3]. В работе [4] описана линейная устойчивость течения гетерогенной жидкости в трубе кольцевого сечения, внесено предложение, что существует вторичный режим течения. В данной работе рассматривается модель течения для первого этапа эскалаторной схемы.

Многочисленные экспериментальные данные по изучению ламинарно-турбулентного перехода и развитого турбулентного течения показали, что добавление частиц в поток в ряде случаев радикально меняет его свойства.

Устойчивость течения газа со взвешенными твердыми частицами впервые исследовал П. Сэффмен [5]. Позднее задачу линейной устойчивости для сильно разреженной газовзвеси изучал Д. Михаэль [6]. Появление этих работ было связано с тем экспериментальным наблюдением, что добавление мелких частиц к газу может привести к значительному уменьшению диссипации энергии. П. Сэффмен предположил, что частицы пыли следуют за потоком газа с некоторым запаздыванием, обусловленным инерцией и сопротивлением, которые определяются по формуле Стокса, а такая смесь описывается уравнением Навье-Стокса для жидкости и уравнением переноса для частиц. Было установлено, что для плоскопараллельных течений наиболее опасными являются двумерные возмущения, что согласуется с теоремой Сквайра. В работах [7, 8] рассматривалась линейная устойчивость течения Пуазейля и Куэтта в плоском канале для однородного профиля распределения частиц. Исследовалась эволюция малых двумерных возмущений. Было показано, что мелкие частицы оказывают на течение дестабилизирующее влияние, а крупные – стабилизирующее.

В работе [9] изучалось неоднородное распределение частиц в потоке для течения в пограничном слое на плоской пластине.

В линейной теории устойчивости параллельных течений вязкой жидкости обычно изучаются двумерные возмущения, так как для многих течений справедлива теорема Сквайра. Известно, что при больших числах Рейнольдса область генерации турбулентности на начальном этапе ее развития формируется трехмерными возмущениями. Кроме того, скорость производства турбулентной энергии обусловлена не декрементами по линейной теории, а нелинейным трехгармоническим взаимодействием нейтральных и нарастающих возмущений, трехмерность которых играет существенную роль.

М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн предложили эскалаторную схему приближенного описания турбулентности. На первом этапе (моногармоническое приближение) пульсации скорости аппроксимируются одной гармоникой по однородным переменным [3].

В данной работе рассматривается моногармоническое приближение гетерогенной жидкости в трубе кольцевого сечения. Течение характеризуется тремя параметрами: числом Рейнольдса, массовой концентрацией частиц и временем релаксации, которое определяется размером и плотностью частиц. Профиль распределения массовой концентрации частиц считается однородным, возмущение, накладываемое на течение, – трехмерным.

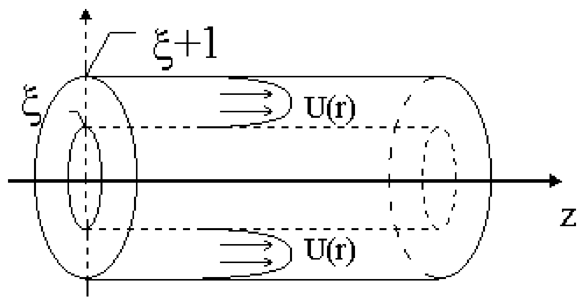

Рис. 1. Вид профиля течения Пуазейля в трубе кольцевого сечения

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с частицами между двумя коаксиальными цилиндрами (рис. 1). Ось Oz цилиндрической системы координат направим по оси цилиндров вдоль основного течения. Радиус внутреннего цилиндра – x, внешнего – x+1. Будем считать степень разреженности частиц настолько большой, что непосредственным взаимодействием частиц и связанными с ним процессами переноса можно пренебречь. Будем также пренебрегать броуновским движением и силой Архимеда. Частицы предполагаются сферическими [7].

Рассмотрим стационарную систему уравнений Навье-Стокса для двухфазной жидкости, записанную в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{V}_f\nabla)\mathbf{V}_f = -\nabla P + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V}_f + \frac{\rho_p}{SR}(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f), \\ &(\mathbf{V}_p\nabla)\mathbf{V}_p = \frac{1}{SR}(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $R = U_0 L\rho_f/\mu$ – число Рейнольдса и $S = 2/9(a/L)^2\rho_p^*/\rho_f$ – безразмерное время релаксации, где a – радиус частицы, L – ширина зазора между цилиндрами; U_0 – среднерасходная скорость; $\rho_p = M/\rho_f \cdot n_p$ – безразмерная массовая плотность континуума частиц; $M = 4/3\pi a^3 \cdot \rho_p^*$ – масса частицы; ρ_p^*, ρ_f – плотности частиц и несущей жидкости соответственно.

Из второго уравнения следует, что если стационарное течение параллельно, тогда левая часть уравнения равна нулю, поэтому профиль скорости основного течения жидкости $\mathbf{V}_{0f}$ и основной профиль скорости частиц $\mathbf{V}_{0p}$ должны быть равны. Несмотря на то, что профиль скорости частиц равен профилю скорости жидкости или газа между потоками частиц и жидкости есть существенное различие. Плотность жидкости по сечению канала считается однородной, а плотность частиц может быть различной.

Запишем выражение для моногармонического приближения вязкой жидкости. Для этого представим решение первого уравнения системы (1) в виде суммы стационарного решения и возмущения. При этом рассматриваем возмущение в виде спиральных волн

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= A_1[u(r), v(r), w(r)]\exp\{i\alpha(z - Ct) + im\varphi\} + \\ &+ A_2[u(r), v(r), w(r)]\exp\{-i\alpha(z - Ct) + im\varphi\} + \kappa.\varrho. \end{aligned} \tag{2}$$

В результате будем иметь выражение вида

$$\frac{1}{R}\Delta\mathbf{U} = \nabla P_0 + F_{00}. \tag{3}$$

Далее будем считать, что

$$\mathbf{U} = (0, \mathrm{V}, \mathrm{W}); \quad \mathrm{P}_0 = \Pi z + \mathrm{const}. \tag{4}$$

Принимая П = 1, получим следующие выражения для профиля скорости, записанного покомпонентно:

$$\begin{aligned} &e_r:\ 0 = 2\mathrm{Re}\left\{A_1A_1^*\left(uu^{*'} + u^*u' - \frac{im}{r}[vu^* - v^*u] - i\alpha\alpha[w^* - w^*u] - \frac{2}{r}vv^*\right)\right\}; \\ &e_\varphi:\ \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{r}V' + V'' - \frac{V}{r^2}\right\} = 2\mathrm{Re}\left\{A_1A_1^*\left(uv^{*'} + u^*v' - i\alpha\alpha[w^* - w^*v] + \frac{vu^* + v^*u}{r}\right)\right\}; \\ &e_z:\ \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{r}W' + W''\right\} = 2\mathrm{Re}\left\{A_1A_1^*\left(uw^{*'} + u^*w' - \frac{im}{r}[vw^* - v^*w]\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Движение гетерогенной жидкости описывается уравнением Навье-Стокса для несущей жидкости и уравнением переноса для частиц, записанных в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}_f + (\mathbf{V}_f\nabla)\mathbf{V}_f = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V}_f + \frac{\rho_p}{SR}(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f), \\ &\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}_p + (\mathbf{V}_p\nabla)\mathbf{V}_p = \frac{1}{SR}(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f), \\ &\nabla\mathbf{V}_f = 0 \quad \frac{\partial\rho_p}{\partial t} + \nabla(\rho_p\mathbf{V}_p) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Граничным для частиц и несущей жидкости будут условие непроницаемости границ и обычное условие прилипания на стенках канала:

$$\mathbf{V}_{p,n}\big|_{\xi,\xi+1} = 0; \ \mathbf{V}_{f,n}\big|_{\xi,\xi+1} = 0.$$

В качестве профиля скорости основного течения $U(r)$ выбирем:

$$\mathrm{U(r)} = \mathrm{A}\cdot \mathrm{r}^2 - \mathrm{B}\cdot\ln(\mathrm{r}) + \mathrm{C}. \tag{7}$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка для амплитуд скоростей и давления

$$\begin{cases} w' - \frac{\xi}{r}\Lambda = 0, \quad \psi' + \frac{im}{r}\Phi + i\alpha\frac{r}{\xi}w = 0, \quad \Phi' - \frac{r}{\xi}\Omega = 0, \\ \Lambda' + a\frac{r}{\xi}w - RU'\psi - b\psi - i\alpha\frac{r}{\xi}\chi = 0, \\ \chi' + \frac{im}{r}\Omega + i\alpha\frac{\xi}{r}\Lambda - a\frac{\xi}{r}\psi + \frac{2VfR\xi\left(V' + V/r\right)}{r^2B(1 + KSR)}\psi - \\ -\frac{\xi}{r}\left[\frac{2VR}{r} - \frac{2Vf}{rSB(1 + KSR)}\right]\Phi = 0, \\ \Omega' + \frac{2im}{r^3}\xi\psi + a\frac{\xi}{r}\Phi - \frac{im}{r}\chi - \frac{\xi}{r}\left[V' + V/r\right]\left[R + \frac{f}{SB(1 + KSR)}\right]\psi + \\ +\frac{\xi}{r}\left[\frac{1 - BSR}{BS} + \frac{KSR^2}{(1 + KSR)}\right]\Phi = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\psi = \frac{r}{\xi}u,\ \ \Phi = \frac{r}{\xi}v,\ \ \chi = R\cdot p,\ \ \Lambda = \frac{r}{\xi}w',\ \ K = i\alpha(W - C) + \frac{im}{r}V,$$

$$\Omega = \frac{1}{r}(rv)' = \frac{\xi}{r}\Phi',\ \ a = -KR(1+fJ) - k^2,\ \ b = f(r)RW'J^2,$$

$$J^{-1} = 1 + KSR,\ \ k^2 = \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2\ \ \ B = K + \frac{1}{SR} + \frac{2VSRJ}{r}\left(V' + \frac{V}{r}\right)$$

Из формулы (8) видно, что система сходна с системой обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд скоростей и давлений, полученной при выводе уравнений для линейной задачи [4]. В данном случае добавились переменные, обусловленные дополнительным членом в профиле основного течения.

Система (8) совместно с граничными условиями $(w,\Phi,\psi)\big|_{\xi,\xi+1} = 0$ представляет собой однородную краевую задачу на собственные значения, которая может решаться численно с помощью метода дифференциальной прогонки [3].

Описание течения вязкой несжимаемой гетерогенной жидкости, которое приведено выше, получено исходя из феноменологического способа описания подобного потока жидкости. В последнее время предпринимаются следующие попытки описания двухфазной жидкости. Уравнения для жидкости описывают известными уравнениями гидродинамики, а уравнения для частиц – кинетическими уравнениями [10–12]. В итоге результаты исследований становятся, вероятно, более реалистичными. Хотя феноменологическая модель обладает рядом недостатков (она плохо работает в сильно неравновесных случаях, а результаты получаются с точностью до некоторых постоянных или функций), на этом пути были получены довольно впечатляющие результаты.

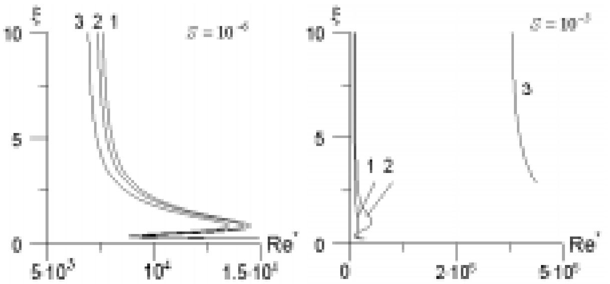

Рис. 2. Зависимости критических чисел Рейнольдса Re^* от величин f и ξ. Цифры у кривых соответствуют следующим значениям массовой концентрации: 1 – f = 0.05; 2 – f = 0.1; 3 – f = 0.2

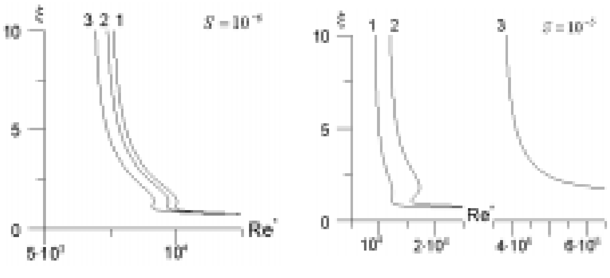

Рис. 3. Зависимости критических чисел Рейнольдса Re^* от величин f и ξ. Цифры у кривых соответствуют следующим значениям массовой концентрации: 1 – f = 0.05; 2 – f = 0.1; 3 – f = 0.2

Исходя из теоретических результатов, приведенных в данной работе, можно сделать некоторые предположения о вероятных результатах численного анализа, который будет проведен позднее. Известно, что установление спиральных автоколебаний приводит к возникновению вращения основного потока [1, 2]. Как видно из линейной теории устойчивости течения вязкой несжимаемой двухфазной гетерогенной жидкости [4], при достаточно малых значениях радиуса внутреннего цилиндра x < 3.5 наиболее опасными становятся трехмерные спиральные возмущения m = 1 и m = 2.

Зависимости критических чисел Рейнольдса для характерных значений массовой концентрации частиц f от x для линейной теории представлены на рисунке 2 при m = 1 и на рисунке 3 при m = 2.

Из этих рисунков хорошо видно, что с ростом концентрации частиц при $SR \ll 1$ происходит дестабилизация течения, т.е. критические числа Рейнольдса уменьшаются. При увеличении параметра SR с ростом концентрации частиц зависимости критических чисел Рейнольдса Re^* от величин x смещаются вправо. Происходит стабилизация потока при увеличении концентрации частиц. Таким образом, увеличение концентрации частиц в потоке приводит к дестабилизации течения при $SR \ll 1$, однако с ростом параметра SR присутствие в потоке частиц приводит к его стабилизации.

Взаимодействие спиральных мод на нелинейном этапе развития неустойчивости ведет к формированию двух типов автоколебаний: осесимметричных и спиральных. Установление осесимметричного автоколебательного режима приводит к деформации исходного профиля течения. Подобное изменение основного профиля течения должно происходить и при изучении моногармонического приближения.

Литература

1. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Общие свойства вторичных несимметричных режимов в параллельных МГД-течениях // Известия АГУ. 1997. №1.
2. Sagalakov A.M., Yavorsky N.I., Yudintsev A.Yu. Mechanism of Spontaneous Symmetry Breaking in MHD-flows. International Congress «Electromagnetic Processing of Materials», Conferences Proceedings. Paris, 1997. Vol. 1.
3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, 1977.
4. Kozhukhovskaya T.A., Kryukov A.A., Sagalakov A.M., Yudintsev A.Yu. Stability of parallel flow of a two-phase liquid between coaxial cylinders // Russian J. Eng. Thermophys. 2000. Vol. 10. №2.
5. Saffman P.G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // Fluid Mech. 1962. V.13.
6. Michael D.H. On the stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // Fluid Mech. 1964, V. 18.
7. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б. Устойчивость гетерогенных сред. I: Устойчивость плоского течения Пуазейля: Препринт НГАС. №2(4)-94). Новосибирск, 1994.
8. Борд Е.Г., Исаков Е.Б., Рудяк В.Я., Суровцева (Белкина) Е.В. Устойчивость течений дисперсных жидкостей. IV: Течение Куэтта: Препринт НГАС. №1(10)-97). Новосибирск, 1997.
9. Белкина Е.В., Исаков Е.Б., Рудяк В.Я. Устойчивость разреженного двухфазного течения в пограничном слое // V Международный семинар по устойчивости гомогенных и гетерогенных жидкостей. Новосибирск, 1998.
10. Лунькин Ю.П., Мымрин В.Ф. Кинетическая модель газовзвеси // Известия АН СССР. МЖГ. 1981. №1.
11. Янков Я.Д. Кинетическая теория дисперсных систем // Известия АН СССР. МЖГ. 1980. №1.
12. Гладков М.Ю., Рудяк В.Я. Кинетические уравнения мелкодисперсной разреженной газовзвеси // Известия АН СССР. МЖГ. 1994. №2.