УДК 532.5+536.2

А.А. Бочкарев, В.И. Волков

Стоксовское обтекание сферы в пограничном слое

Наиболее эффективное управление тепломассопереносом в гидродинамических установках возможно за счет изменения параметров гидродинамического и теплового пограничных слоев, так как основной скачок скорости и температуры происходит вблизи обтекаемой поверхности. В данной работе предлагается управление гидродинамическим слоем с помощью ферритовых частиц, удерживаемых вблизи поверхности электромагнитным полем. Приведем расчет обтекания сферической частицы в пограничном слое, решим уравнения Навье-Стокса в градиентном потоке.

Пусть неподвижная жесткая сфера у стенки диаметром $D = 2R$ обтекается градиентным, стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Направим ось x вдоль скорости потока. В уравнении Навье-Стокса не будем принимать во внимание инерционный член $\rho(\vec{U}\nabla)\vec{U}$. Используя уравнение несжимаемости $\nabla\vec{U} = 0$, получим замкнутую систему уравнений

$$\nabla p = \mu\Delta\vec{U}; \quad \operatorname{div}\vec{U} = 0. \tag{1}$$

Скорость жидкости будем считать в виде $U_x = k(y+R) = U_0 + ky$.

Решение будем искать отдельно для потоков U_0 и ky. Для первого случая воспользуемся решением, приведенным в работе Л.М. Бреховских и В.В. Гончарова «Введение в механику сплошных сред» (М., 1982, с. 56).

Граничные условия в первом случае будут

$$\vec{U}\big|_{r=R} = 0, \quad U_x\big|_{r\to\infty} = U_0, \quad U_y\big|_{r\to\infty} = U_z\big|_{r\to\infty} = 0. \tag{2}$$

Подставляя скорость в следующем виде:

$$\vec{U} = \nabla\varphi + \vec{w}(x,y,z). \tag{3}$$

Функцию φ ищем в виде, удовлетворяющем условию $\varphi\big|_{r\to\infty} = U_0$.

$$\varphi = U_0 x + c_1\frac{\partial r}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4}$$

Из условия несжимаемости $\Delta\varphi + \nabla\vec{w}(x,y,z) = 0$ получаем

$$\vec{w}(x,y,z) = -2\left(c_1\frac{\nabla x}{r}\right). \tag{5}$$

Отсюда получим выражение для U:

$$\vec{U} = \left(U_0 - c_1\frac{1}{r} - c_2\frac{1}{r^3}\right)\vec{i} + x\left(c_1\frac{1}{r^3} + c_2\frac{1}{r^5}\right)\vec{r}. \tag{6}$$

Условие $\vec{U} = U_0\nabla x$ при $r\to\infty$ удовлетворяется, потребуем теперь выполнения условия на поверхности сферы $\left(\vec{U}\big|_{r=R} = 0\right)$, найдем c_1, c_2.

$$c_1 = \frac{3}{4}U_0 R; \quad c_2 = \frac{1}{4}U_0 R^3; \tag{7}$$

$$\vec{U} = \left(U_0\left(1 - \frac{3R}{4r} + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right)\right)\vec{i} + \left(U_0\left(\frac{3Rx}{4r^3}\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\right)\right)\vec{r}. \tag{8}$$

Получим из первого уравнения, учитывая, что $\Delta\vec{w} = 0$:

$$\nabla p = \mu\Delta(\nabla\varphi) = \nabla(\mu\Delta\varphi). \tag{9}$$

Для $\Delta\varphi$ найдем из представленных выше выражений:

$$p = -\mu\frac{3RxU_0}{2r^3}. \tag{10}$$

Во втором случае скорость жидкости будет зависеть от y, т.е. вместо U_0 будет $U_0(y) = ky$, тогда граничные условия (2) изменятся.

$$\vec{U}\big|_{r=R} = 0, \quad U_x\big|_{r\to\infty} = ky, \quad U_y\big|_{r\to\infty} = U_z\big|_{r\to\infty} = 0. \tag{11}$$

Функцию φ будем также искать в виде, удовлетворяющем условию $\varphi\big|_{r\to\infty} = ky$.

Представим φ в виде, удовлетворяющем условию:

$$\nabla\varphi = \nabla\varphi_1 + \vec{A}. \tag{12}$$

Возьмем $\vec{A} = -kx\vec{j} - 10\frac{c_3 x}{r^7}\vec{j}$, (13)

$$\varphi_1 = kxy + c_1 y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + c_2 y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) + c_3 y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^5}\right). \tag{14}$$

Получим

$$\begin{aligned}\nabla\varphi = \nabla\varphi_1 + \vec{A} = ky\vec{i} - c_1\left(\frac{y}{r^3}\right)\vec{i} - c_1\left(\frac{x}{r^3}\right)\vec{j} + {}\\ + 3c_1\left(\frac{xy}{r^5}\right)\vec{r} - c_2\left(\frac{3y}{r^5}\right)\vec{i} - c_2\left(\frac{3x}{r^5}\right)\vec{j} - 10\frac{c_3 x}{r^7}\vec{j} + {}\\ + 15c_2\left(\frac{xy}{r^7}\right)\vec{r} - c_3\left(\frac{5y}{r^7}\right)\vec{i} - c_3\left(\frac{5x}{r^7}\right)\vec{j} + 35c_3\left(\frac{xy}{r^7}\right)\vec{r}.\end{aligned} \tag{15}$$

$$\Delta\varphi = \frac{6yxc_1}{r^5}. \tag{16}$$

Из условия несжимаемости $\Delta\varphi + \nabla\vec{w}(x,y,z) = 0$ получим

$$\vec{w}(x,y,z) = \frac{2yc_1}{r^3}\vec{i}. \tag{17}$$

Подставляя последнее выражение вместе с (16) в (3), для вектора скорости имеем

$$\vec{U} = ky\vec{i} + c_1\left(\frac{y}{r^3}\right)\vec{i} - c_2\left(\frac{3y}{r^5}\right)\vec{i} - \\ - c_3\left(\frac{5y}{r^7}\right)\vec{i} - c_1\left(\frac{x}{r^3}\right)\vec{j} - c_3\left(\frac{15x}{r^7}\right)\vec{j} - c_2\left(\frac{3x}{r^5}\right)\vec{j} + \\ + 3c_1\left(\frac{xy}{r^5}\right)\vec{r} + 15c_2\left(\frac{xy}{r^7}\right)\vec{r} + 35c_3\left(\frac{xy}{r^9}\right)\vec{r} \ . \qquad (18)$$

Потребуем выполнение условия на поверхности сферы $\left(\vec{U}\big|_{r\to\infty} = 0\right)$.

$$c_1 = -\frac{2kR^3}{3}; \quad c_2 = \frac{kR^5}{18}; \quad c_3 = \frac{kR^7}{30}. \qquad (19)$$

Таким образом, для скорости частиц жидкости при обтекании сферы получаем

$$\vec{U} = ky\left(1 - \left(\frac{2R^3}{3r^3}\right) - \left(\frac{R^5}{6r^5}\right) - \left(\frac{R^7}{6r^7}\right)\right)\vec{i} + \\ + kx\left(\left(\frac{2R^3}{3r^3}\right) - \left(\frac{R^5}{6r^5}\right) - \left(\frac{R^7}{2r^7}\right)\right)\vec{j} + \\ \frac{kyx}{r^2}\left(-\left(\frac{2R^3}{r^3}\right) + \left(\frac{5R^5}{6r^5}\right) + \left(\frac{7R^7}{6r^7}\right)\right)\vec{r} \ . \qquad (20)$$

Подставляя формулы (19) и (16) в выражение (9), будем иметь $\nabla p = \nabla\left(\mu R^3 \frac{4yxk}{r^5}\right)$.

Решением последнего уравнения, равным нулю на бесконечности, будет

$$p = -\frac{4\mu R^3 yxk}{r^5} \ . \qquad (21)$$

Полная скорость – сумма скоростей (8) и (20), а полное давление – сумма (10) и (21).

Итак, нами получено решение уравнение Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса для сферы в градиентном потоке вблизи стенки. Это решение может быть использовано для нахождения радиуса и магнитной проницаемости ферритовых частиц, которые внесены в пограничный слой с целью управления тепломассообменом.