

Лагутин А. А., Учайкин В. В., Юшков А. В.

Мюоны в случайно-неоднородной среде

В работе рассматривается прохождение мюонов космических лучей через среду, свойства которой не определены полностью. Показано, что при такой постановке задачи необходимо вводить статистический ансамбль сред, включающий все множество возможных реализаций среды с заданной на этом множестве вероятностью. Для построения такого ансамбля мы вводим марковскую модель многокомпонентной случайной среды и показываем ее применимость в случае грунта КГФ.

С использованием марковской модели в работе получены распределения вертикальных интенсивностей мюонов на больших глубинах грунта КГФ. Из сопоставления этих распределений с экспериментальными данными нами сделан вывод о форме спектра мюонов на уровне моря.

Введение

Извлечение физической информации из результатов наземных и подземных измерений мюонной компоненты космических лучей производится с помощью численного решения кинетических (каскадных) уравнений при различных условиях. Процедура решения предполагает наличие довольно подробной информации о химическом составе и физических свойствах среды, в которой распространяются частицы. Задание такой информации не составляет особых трудностей, если рассматривается перенос частиц в однородной среде (например, мюонов в воде) при известных сечениях элементарных процессов. В случае неоднородной среды необходимо задавать пространственное распределение плотности $\rho(\vec{r})$ и других характеристик среды, влияющих на перенос частиц (для мюонов - Z/A и Z^2/A). При длительных измерениях в атмосфере необходимо учитывать изменения ее свойств с течением времени (в этом случае $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ и т.д.).

Зависимость теоретических результатов от вида функций $\rho(\vec{r})$ и других характеристик среды и очевидная невозможность полного определения их экспериментальным путем в атмосфере или грунте приводит к специфической задаче теории переноса частиц в условиях некоторой неопределенности свойств среды. Это — принципиальное положение, поскольку измерение $\rho(\vec{r})$ практически может быть выполнено лишь в конечном числе точек и всегда остается некоторая неопределенность в бесконечном множестве (континууме) остальных точек среды, посещаемых частицами. В качестве примера приведем исследования на установке КГФ [1], в результате которых были изучены состав и плотность грунта в 25 точках на 16-ти различных уровнях до глубины 2700 (табл. 1). При этом установле-

на сложная структура грунта, представляющая собой чередование минералов трех типов (два из которых близки по свойствам). В данных точках получена полная информация, однако положения границ слоев между соседними точками с разными типами среды (будем называть тип среды, для краткости, фазой) неизвестны, и кроме того, на нескольких уровнях повторные измерения дали разный состав. Таким образом, даже столь тщательные геологические исследования не исключили неопределенность среды. Можно было бы, конечно, выбрать для расчета какую-то конкретную среду, совместимую с результатами проведенных измерений (по крайней мере, если бы не было различных фаз на одном уровне), но конкретный выбор ее из множества других сред, также совместимых с данными измерений и различающихся между собой положением неконтролируемых границ слоев, не может быть достаточно аргументирован. Логический выход из этой ситуации заключается во введении статистического ансамбля сред, в котором рассматривается все множество возможных сред (реализаций среды) с заданной на этом множестве вероятностью. Разумеется, такой ансамбль порождает соответствующий ансамбль теоретических результатов, например, ансамбль значений потока мюонов на данной глубине.

В данной работе мы рассматриваем эти проблемы на примере установки КГФ. Для построения ансамбля сред грунта КГФ мы вводим марковскую модель случайной среды и показываем ее применимость в рассматриваемом случае (части 4–5). В 6-ой части выведены уравнения для плотности распределения стохастической ценности мюона в марковской среде и произведены оценки влияния флуктуаций свойств грунта на интенсивность мюонов. Далее, используя марковскую двухфазную модель случайной сре-

ды, мы получили распределения интенсивностей мюонов для четырех исходных дифференциальных спектров. На основе сопоставления результатов наших расчетов с экспериментальными данными, был сделан вывод о форме спектра мюонов на уровне моря.

Таблица 1
Состав и плотность грунта в районе расположения установки КГФ [1]

Глубина, м	Плотность, г/см ³	Тип породы
122	2,98	H.S. ¹
305	3,00	H.S.
610	3,01	H.S.
	2,97	Q ²
853	2,98	H.S.
	3,08	Q
1036	2,99	H.S.
1280	3,04	H.S.
1432	3,16	H.S.
1585	3,07	H.S.
1737	3,07	H.S.
	2,65	P ³
1768	2,70	P
	2,66	P
1890	3,06	H.S.
	2,67	Q
2042	3,00	H.S.
2225	2,98	H.S.
	3,28	H.S.
2408	2,65	P
	2,60	P
2499	3,07	H.S.
	2,64	P
2682	2,62	P
	3,00	H.S.

H.S.¹—Роговая обманка

Q²—Кварц

P³—Пегматит

1. Статистический ансамбль сред грунта КГФ

Прежде чем переходить к изложению количественных методов решения поставленных во введении задач, обсудим их, сначала, на конкретном примере уже упоминавшейся установки КГФ [1]. При построении ансамбля сред доопределим имеющуюся информацию (табл. 1) следующим образом:

1) если в двух соседних по глубине опорных точках имеется одна и та же фаза, то считаем, что

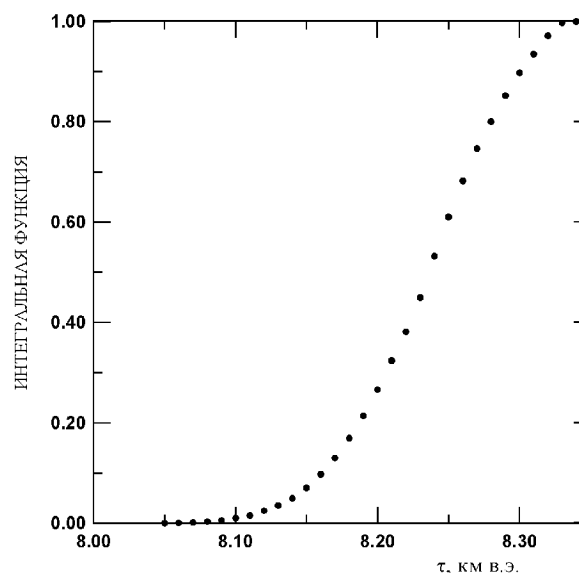


Рис. 1. Распределение массовой толщины грунта в районе расположения установки КГФ, полученное методом Монте-Карло. $s=2760$ м. $\langle\tau\rangle=8.23$ км в.э.

она заполняет и весь промежуток между ними; 2) если в соседних точках различные фазы, то между ними имеется всего одна граница и положение ее в данном промежутке равновероятно; 3) если на данном уровне указаны две фазы (фазы Q и P с близкими свойствами мы рассматриваем как одну), то при моделировании реализации среды мы выбираем любую из них с равной вероятностью $1/2$.

Методом Монте-Карло было построено 25000 реализаций указанного ансамбля, для каждой из которых была найдена массовая толщина τ слоя t глубиной 2760. Распределение этой величины приведено на рис.1. Если пренебречь влиянием флуктуаций Z/A и Z^2/A на поток мюонов $J_\mu(\tau)$, то по теоретически найденной зависимости $J_\mu(\tau)$ и распределению τ можно получить распределение $J_\mu(\tau)$ для данного ансамбля.

Чтобы уточнить смысл сопоставления расчетных и экспериментальных данных, заметим, что в расчет интенсивности мюонов был заложен первичный спектр мюонов и другая информация, относительно которой нет полной определенности. Более того, именно эта, введенная в расчет, информация и апробируется путем сопоставления с данными эксперимента. Упрощенно задача сопоставления теории с экспериментом заключается в решении вопроса: принять или отвергнуть гипотезу, в качестве которой и выступает здесь введенная информация (например, первичный спектр частиц). С вероятностной точки зрения это означает дать ответ на вопрос: принадлежит ли J ансамблю случайной

величины с распределением $P(J)$ или нет? Таким образом, мы приходим к следующему выводу: сопоставлять экспериментальный результат следует со всем распределением теоретических результатов, полученных по выбранному ансамблю сред. В этом смысле среднее по ансамблю $\langle J \rangle$ вовсе не является той величиной, которая должна быть близка к J , а есть лишь параметр, определяющий положение центра тяжести распределения $P(J)$. Для приближенной оценки ситуации необходим по крайней мере еще один параметр, характеризующий ширину распределения $P(J)$, в качестве которого можно использовать дисперсию (если $P(J)$ близко к нормальному закону). Заметим, что мы пренебрегли здесь тем, что экспериментально измеренная величина в свою очередь содержит некоторую статистическую погрешность, поскольку с увеличением времени измерения она может быть сделана сколь угодно малой. Последнее, правда, справедливо для случая стационарной среды; в нестационарной среде (атмосфере) возникает дополнительная составляющая погрешности, как результат усреднения по времени [2].

2. Случайно-неоднородная среда

Статистическому ансамблю сред можно дать несколько иную интерпретацию, более полезную для построения расчетных алгоритмов, основанных на кинетических уравнениях. Распределение $P(J)$ в случае источника единичной мощности можно рассматривать как результат последовательного прохождения частиц через объем, в котором каждая из частиц встречается со "своей" реализацией среды. Наглядный пример: слабый источник испускает в среднем одну частицу в секунду, частицы эти проходят через объем, занятый кипящей жидкостью. За время прохождения частицы через объем конфигурация неоднородностей среды (пузырьков) не меняется, но следующая частица застаёт среду уже совсем в другом состоянии. В связи с этим данная интерпретация ансамбля называется случайно-неоднородной или стохастической средой. Не следует считать, что понятие ансамбля или случайной среды связано исключительно с неопределенностью в ее задании. Предположим, что каким-то образом нам достоверно известны функция $\rho(\vec{r})$ и другие величины, характеризующие неоднородную среду во всех ее точках, но детектор регистрирует мюоны, приходящие в некотором телесном угле $d\Omega$ на его чувствительный объем. Полагая движение мюонов в среде прямолинейным, а направления зареги-

стрированных мюонов — случайными в $d\Omega$, мы отмечаем, что разные мюоны в процессе движения прошли по прямым с разными свойствами среды. Здесь очевидным образом можно однозначно построить статистический ансамбль, совершенно адекватно описывающий физическую ситуацию и приводящий к точному результату, в качестве которого теперь выступает уже именно $\langle J \rangle$, а распределение по J в данном ансамбле самостоятельного значения не имеет. С уменьшением $d\Omega$ распределение сужается и в пределе сводится к одномерной задаче движения мюона по прямой с заданной зависимостью свойств среды от координаты. Если же учесть рассеяние частиц, то и при сколь угодно малом $d\Omega$ детектор будут попадать частицы, побывавшие в разных областях неоднородной среды. Таким образом, понятие случайной среды возникает и в задачах переноса частиц в детерминированных неоднородных средах, но этот подход здесь выглядит более как искусственный прием для упрощения вычислений, чем неизбежная необходимость, с которой мы встречаемся в задачах с неполностью определенной средой.

3. Марковская модель случайной среды

Возвращаясь к нашим задачам, отметим, что обычно информация относительно распределения и состава неоднородностей в глубине грунта значительно более бедна, чем в случае КГФ. Так на установке Монблан [3] и в Баксанской нейтринной обсерватории [4] подробные данные о составе и свойствах грунта имеются лишь для глубины, на которой расположено экспериментальное оборудование. Понятно, что в таких случаях остается сделать лишь самые общие предположения относительно возможных фаз, их толщин и глубин залегания, вытекающие, например, из геологических аналогий. Уменьшение информации приводит к расширению статистического ансамбля сред, для построения которого можно использовать уже более широкий круг алгоритмов. Некоторые из алгоритмов моделирования ансамблей неоднородных сред приведены в книгах [2,5]. Мы остановимся здесь на одном таком алгоритме, получившем в последнее время интенсивное развитие в связи с исследованиями прохождения мощного лазерного излучения через вещество [6].

Речь идет о марковской модели многофазной случайной среды. В этой модели предполагается, что физические свойства реализаций среды вдоль некоторой оси Ox описываются кусочно-

постоянными функциями, множество значений которых конечно. Постоянство функции в данном интервале dx означает, что он заполнен однородным веществом определенного типа. Мы называем эти вещества, комбинированием которых получается неоднородная среда, фазами. Однофазная среда однородна, двухфазная – простейший случай данной модели – состоит из чередующихся отрезков обеих фаз различной длины: если слева от границы была фаза 1, то справа будет 2 и наоборот.

Разные реализации случайной многофазовой среды различаются между собой положениями границ и последовательностью фаз, заполняющих промежутки между ними. Вероятностную меру в пространстве этих реализаций и задают с помощью марковского скачкообразного процесса с непрерывным временем, роль которого играет пространственная координата x . Для этого достаточно задать начальные вероятности $p_k(0)$ и вероятности переходов в единицу времени $\sigma_{j \rightarrow k}$, где $\sigma_{j \rightarrow k} dx$ – вероятность изменения типа фазы с j на k на расстоянии dx , причем

$$\sigma_j = \sum_{k \neq j} \sigma_{j \rightarrow k}.$$

Вероятность того, что на глубине x в данной реализации будет находиться k -я фаза, представляется в виде

$$p_k(x) = \sum_i p_i(0) p_{i \rightarrow k}(x), \quad (1)$$

где $p_{i \rightarrow k}(x)$ – вероятности перехода $i \rightarrow k$ на отрезке длиной x удовлетворяют уравнениям [2]

$$\frac{\partial p_{i \rightarrow k}}{\partial x} + \sigma_k p_{i \rightarrow k} = \sum_{j \neq k} p_{i \rightarrow j} \sigma_{j \rightarrow k}, \quad p_{i \rightarrow k}(0) = \delta_{ik}. \quad (2)$$

В частности, для двухфазной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{1 \rightarrow 1}}{\partial x} + \sigma_1 p_{1 \rightarrow 1} &= \sigma_2 p_{1 \rightarrow 2}, p_{1 \rightarrow 1}(0) = 1, \\ \frac{\partial p_{1 \rightarrow 2}}{\partial x} + \sigma_2 p_{1 \rightarrow 2} &= \sigma_1 p_{1 \rightarrow 1}, p_{1 \rightarrow 2}(0) = 0, \\ \frac{\partial p_{2 \rightarrow 1}}{\partial x} + \sigma_1 p_{2 \rightarrow 1} &= \sigma_2 p_{2 \rightarrow 2}, p_{2 \rightarrow 1}(0) = 0, \\ \frac{\partial p_{2 \rightarrow 2}}{\partial x} + \sigma_2 p_{2 \rightarrow 2} &= \sigma_1 p_{2 \rightarrow 1}, p_{2 \rightarrow 2}(0) = 1. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} p_{1 \rightarrow 1} &= [\lambda_1 + \lambda_2 \exp(-x/\lambda)] / (\lambda_1 + \lambda_2), \\ p_{1 \rightarrow 2} &= \lambda_2 [1 - \exp(-x/\lambda)] / (\lambda_1 + \lambda_2), \end{aligned}$$

$$p_{2 \rightarrow 1} = \lambda_1 [1 - \exp(-x/\lambda)] / (\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$p_{2 \rightarrow 2} = [\lambda_2 + \lambda_1 \exp(-x/\lambda)] / (\lambda_1 + \lambda_2),$$

где $\lambda_i = 1/\sigma_i$, $\lambda = 1/\sigma$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Ясно, что $p_{1 \rightarrow 1} + p_{1 \rightarrow 2} = p_{2 \rightarrow 2} + p_{2 \rightarrow 1}$, то есть из четырех вероятностей только две независимы. Используя эти решения в формуле (1), находим, в частности, что

$$p_1(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \times \{ \lambda_1 + [\lambda_2 p_1(0) - \lambda_1 p_2(0)] / \exp(-x/\lambda) \}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что при $\lambda_2 p_1(0) - \lambda_1 p_2(0) = 0$ мы имеем постоянные решения

$$p_i(x) = p_i(0) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Для такой статистически однородной среды среднее сечение $\langle \Sigma \rangle = p_1 \Sigma_1 + p_2 \Sigma_2$ и дисперсия $D\Sigma = p_1 p_2 (\Sigma_1 - \Sigma_2)^2$ не зависят от x , а корреляционная функция $R_\Sigma(x', x'') = D\Sigma \exp[-|x'' - x'|/\lambda]$ зависит лишь от расстояния между точками x' и x'' [2].

Уравнения (1–2) были применены для описания случайно-неоднородной среды в работах [6–9].

4. Фазонная интерпретация марковской среды

Уравнения (1–2) позволяют дать новую полезную интерпретацию марковской случайной среды, основанную на их формальном сходстве с уравнениями переноса частиц различных типов, движущихся в направлении оси Ox . В этой интерпретации $p_i(0)$ означает вероятность рождения частицы типа i в точке $x = 0$, $p_i(x)$ – вероятность того, что частица, проходящая через точку x , принадлежит типу i , $\sigma(x) dx$ – вероятность того, что частица типа i на элементарном пути dx изменит свой тип (в этом и состоит результат “взаимодействия”), $\sigma_{j \rightarrow k}(x) dx$ – вероятность изменения типа j на тип k частицы на этом пути. При этом свободный пробег частицы i -го типа ассоциируется со слоем среды, занятым i -й фазой, а точки взаимодействия в начале и конце пробега – с границами i -й фазы. Эти частицы были названы фазонами [2]. Каждой траектории фазона соответствует определенная реализация случайно-неоднородной марковской среды и, стало быть, задаваемые марковским скачкообразным процессом вероятности в пространстве фазовых траекторий определяют вероятности в пространстве реализаций среды. Усреднение по реализациям среды адекватно усреднению по фазонным траекториям, в чем,

собственно, и заключается смысл данной интерпретации.

Умножив (1-2) на большое число N , перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \sigma_k \varphi_k = \sum_{j \neq k} \varphi_j \sigma_{j \rightarrow k}, \quad \varphi_k(0) = N p_k(0),$$

где $\varphi_k(x) = N p_k(x)$ можно интерпретировать как поток фазонов типа k на глубине x , а $N = \sum_k \varphi_k(x)$ – полный поток фазонов на этой глубине. Среднее значение сечения взаимодействия настоящих частиц в точке x дается формулой

$$\langle \Sigma(x) \rangle = \sum_k \Sigma_k p_k(x) = \sum_k \Sigma_k \varphi_k(x) / \sum_i \varphi_i(x)$$

Фазонная интерпретация марковской среды открывает возможности для использования понятия ценности по отношению к фазонам. Так, случайная массовая толщина слоя (x, l) , начинающегося в фазе i ,

$$\tau_i(x, l) = \int_x^l \rho(x') dx'$$

может рассматриваться как линейная стохастическая ценность фазона i в точке x . В [2] приведено уравнение для плотности распределения этой ценности

$$-\frac{\partial \Psi_i(\tau|x)}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \Psi_i(\tau|x)}{\partial \tau} + \sigma_i \Psi_i(\tau|x) = \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \Psi_j(\tau|x), \quad (4)$$

$$\Psi_i(\tau|l) = \delta(\tau).$$

из которого вытекают сопряженные уравнения для среднего значения

$$-\frac{\partial \langle \tau \rangle_i}{\partial x} + \sigma_i \langle \tau \rangle_i = \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \langle \tau \rangle_j + \rho_i$$

и высших моментов

$$-\frac{\partial \langle \tau^n \rangle_i}{\partial x} + \sigma_i \langle \tau^n \rangle_i = \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \langle \tau^n \rangle_j + n \rho_i \langle \tau^{n-1} \rangle_i. \quad (5)$$

Рассмотрим подробнее уравнение для среднего значения массовой толщины двухфазной среды:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \langle \tau \rangle_1}{\partial x} + \sigma_1 (\langle \tau \rangle_1 - \langle \tau \rangle_2) &= \rho_1, \\ -\frac{\partial \langle \tau \rangle_2}{\partial x} + \sigma_2 (\langle \tau \rangle_2 - \langle \tau \rangle_1) &= \rho_2. \end{aligned}$$

Производя преобразование Лапласа

$$\tilde{\tau}_i(\xi) = \int_0^\infty \exp(-\xi s) \langle \tau(l-s) \rangle_i ds$$

и разрешая систему алгебраических уравнений для трансформант, получим

$$\tilde{\tau}_1 = \frac{\rho_1(\xi + \sigma_2) + \rho_2 \sigma_1}{\xi^2(\xi + \sigma)}. \quad (6)$$

Выражение для второй трансформанты получается из выражения для первой заменой индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$. Обращая (6) методом вычетов, находим

$$\langle \tau \rangle_1 = \frac{\rho_1 \sigma_2 + \rho_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} s + \frac{\sigma_1(\rho_1 - \rho_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} [1 - \exp(-\sigma s)], \quad (7)$$

где $s = l - x$ – геометрическая толщина слоя. Заметим, что при малых s $\langle \tau \rangle_1 \sim \rho_1 s$, а при больших $\langle \tau \rangle_1 \sim (\rho_1 \sigma_2 + \rho_2 \sigma_1) s / (\sigma_1 + \sigma_2)$. Поскольку выражение для $\langle \tau \rangle_2$ получается из (7) перестановкой индексов, видим, что асимптотика $\langle \tau \rangle_i$ при $s \rightarrow \infty$ не зависит от начального индекса. Усредненная по начальным состояниям массовая толщина статистически однородной случайной среды

$$\langle \tau \rangle = \frac{(\rho_1 \sigma_2 + \rho_2 \sigma_1) s}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (8)$$

так что $\langle \tau \rangle_i \sim \langle \tau \rangle, s \rightarrow \infty$. Уравнения (4) для плотности вероятности также имеют точное аналитическое решение [2,6], приводящее к следующей формуле для кумулятивной функции распределения $F(\tau|s)$ при $\rho_2 s \leq \tau \leq \rho_1 s$:

$$\begin{aligned} F(\tau|s) &= p_1 \left\{ 1 - e^{-u} \left[1 + 2 \int_0^{\sqrt{uv}} dx I_1(2x) e^{-x^2/u} \right] \right\} + \\ &+ p_2 e^{-v} \left[1 + 2 \int_0^{\sqrt{vu}} dx I_1(2x) e^{-x^2/v} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя 1-го порядка,

$$u = \sigma_1 \frac{\tau - \rho_2 s}{\rho_1 - \rho_2}, \quad v = \sigma_2 \frac{\rho_1 s - \tau}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Проведенные нами расчеты показали, что марковская двухфазная модель случайной среды с параметрами $\rho_1 = 3.02$ г/см³, $\rho_2 = 2.65$ г/см³, $\lambda_1 = 500$ м, $\lambda_2 = 56$ м хорошо описывает распределение массовой толщины грунта КГФ в интервале глубин $s = (2760 \div 3870)$ м (рис. 2).

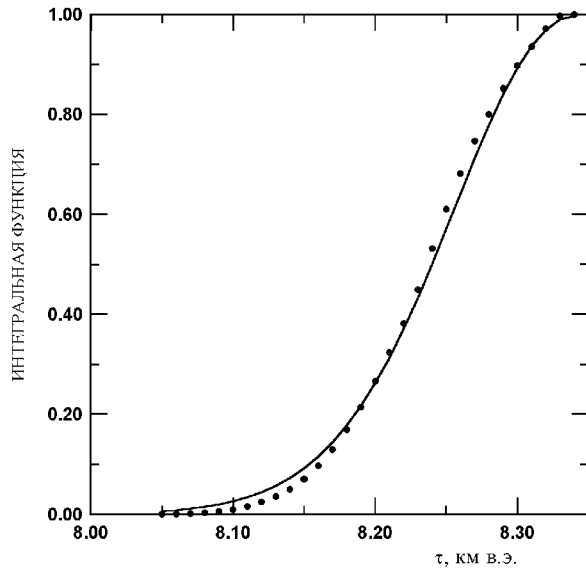


Рис. 2. Распределение массовой толщины грунта в районе расположения установки КГФ. ●●● — метод Монте-Карло, сплошная линия — марковская модель с параметрами $\lambda_1=500$ м, $\lambda_2=56$ м, $\rho_1=3,02$ г/см³, $\rho_2=2,65$ г/см³. $s=2760$ м. $\langle\tau\rangle=8,23$ км в.э.

5. Уравнения для плотности распределения стохастической ценности мюона в марковской среде

В этой части с помощью сопряженного подхода мы получим уравнение для плотности распределения стохастической ценности мюона в марковской среде. Пусть в момент времени t мюон энергии E находится в точке z в фазе i многофазной случайной среды. Подобно [2], представим аддитивный функционал от траектории мюона в виде суммы

$$q_{x,i} = Q_{[t,t+\Delta t]} + Q_{[t+\Delta t,\infty)}, \quad (10)$$

где $Q_{[t,t+\Delta t]}$ определяется участком траектории в промежутке $[t, t + \Delta t)$, $Q_{[t+\Delta t,\infty)}$ — остальной частью, а $x \equiv (z, E, t)$. В промежутке Δt , кроме событий А (движение без столкновений в фазе i) и В (взаимодействие в фазе i), возможен переход из фазы i в фазу j (назовем этот процесс событием С). Вероятности этих событий соответственно равны

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A\} &= 1 - \Sigma_i v \Delta t - \sigma_i v \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{B\} &= \Sigma_i v \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{C\} &= \sigma_{i \rightarrow j} v \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Если понимать под $a_i(z, E)\Delta z$ вклад отрезка пути Δz в фазе i мюона в показание детектора в отсутствие взаимодействий, то стохастическую цен-

ность (10) можно записать в виде

$$q_{x,i} = \begin{cases} a_i(z, E)v\Delta t + q_{z+v\Delta t, E, t+\Delta t, i} + o(\Delta t) & \text{в случае А,} \\ q_{z+\Delta z, E', t+\Delta t, i} + O(\Delta t) & \text{в случае В,} \\ q_{z+\Delta z, E, t+\Delta t, j} + O(\Delta t) & \text{в случае С.} \end{cases}$$

Пусть $\Psi_i(q|x) \equiv \Psi_i(q|z, E, t)$ — плотность распределения стохастической ценности. Приведенные выше соотношения позволяют выразить через нее условные распределения

$$\begin{aligned} \Psi_i(q|x; A) &= \\ &= \Psi_i(q - a_i(z, E)v\Delta t | z + \Delta z, E, t + \Delta t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(q|x; B) &= \frac{1}{\Sigma_i} \int W_i(E \rightarrow E') \times \\ &\times \Psi_i(q|z + \Delta z, E', t + \Delta t) dE' + O(\Delta t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(q|x; C) &= \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \Psi_j(q|z + \Delta z, E, t + \Delta t) + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Применение же формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} \Psi_i(q|x) &= \bar{\Psi}_i(q|x; A)\mathbf{P}\{A\} + \\ &+ \bar{\Psi}_i(q|x; B)\mathbf{P}\{B\} + \bar{\Psi}_i(q|x; C)\mathbf{P}\{C\} \end{aligned}$$

позволяет замкнуть полученные соотношения. После разложения в ряд по Δt приходим к следующему уравнению для плотности распределения стохастической ценности

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} + a_i \frac{\partial}{\partial q} + \Sigma_i + \sigma_i \right] \Psi_i(q|x) - \\ - \int W_i(E \rightarrow E') \Psi_i(q|z, E', t) dE' = \\ = \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \Psi_j(q|x). \end{aligned}$$

В стационарном случае это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial}{\partial z} + a_i \frac{\partial}{\partial q} + \Sigma_i + \sigma_i \right] \Psi_i(q|x) - \\ - \int W_i(E \rightarrow E') \Psi_i(q|z, E', t) dE' = \\ = \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \Psi_j(q|x). \quad (11) \end{aligned}$$

Таблица 2

Зависимость отношения J/\bar{J} от средних размеров фаз $\lambda_i = 1/\sigma_i$ для спектра мюонов S_1 . $E_{th} = 1$ ГэВ

h , км	$\lambda_1 = 4000$ м $\lambda_2 = 1000$ м	$\lambda_1 = 1600$ м $\lambda_2 = 400$ м	$\lambda_1 = 800$ м $\lambda_2 = 200$ м	$\lambda_1 = 400$ м $\lambda_2 = 100$ м	$\lambda_1 = 40$ м $\lambda_2 = 10$ м
1,0	1,34	1,24	1,16	1,09	1,01
3,0	1,96	1,54	1,30	1,16	1,02
4,0	2,45	1,75	1,41	1,21	1,02
5,0	3,07	2,00	1,52	1,26	1,03

Таблица 3

Экспериментальный фит [10] J ($\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{ср}$)⁻¹ и доверительные интервалы для спектров $S_1 \div S_4$ ($\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{ср}$)⁻¹ для различных толщин грунта КГФ

s , м	J [10]	доверительные интервалы $J_{0,025}-J_{0,975}$			
		S_1	S_2	$S_1 + S_3$	$S_2 + S_4$
2760	$2,75 \cdot 10^{-11}$	$2,59 \cdot 10^{-11}$	$2,20 \cdot 10^{-11}$	$3,13 \cdot 10^{-11}$	$2,50 \cdot 10^{-11}$
		$3,33 \cdot 10^{-11}$	$2,82 \cdot 10^{-11}$	$3,96 \cdot 10^{-11}$	$3,18 \cdot 10^{-11}$
3000	$1,27 \cdot 10^{-11}$	$1,14 \cdot 10^{-11}$	$9,71 \cdot 10^{-12}$	$1,46 \cdot 10^{-11}$	$1,14 \cdot 10^{-11}$
		$1,49 \cdot 10^{-11}$	$1,26 \cdot 10^{-11}$	$1,86 \cdot 10^{-11}$	$1,47 \cdot 10^{-11}$
3120	$8,69 \cdot 10^{-12}$	$7,59 \cdot 10^{-12}$	$6,46 \cdot 10^{-12}$	$1,00 \cdot 10^{-11}$	$7,72 \cdot 10^{-12}$
		$9,95 \cdot 10^{-12}$	$8,46 \cdot 10^{-12}$	$1,29 \cdot 10^{-11}$	$9,98 \cdot 10^{-12}$
3400	$3,62 \cdot 10^{-12}$	$2,96 \cdot 10^{-12}$	$2,53 \cdot 10^{-12}$	$4,30 \cdot 10^{-12}$	$3,17 \cdot 10^{-12}$
		$3,91 \cdot 10^{-12}$	$3,34 \cdot 10^{-12}$	$5,51 \cdot 10^{-12}$	$4,12 \cdot 10^{-12}$
3600	$1,96 \cdot 10^{-12}$	$1,51 \cdot 10^{-12}$	$1,29 \cdot 10^{-12}$	$2,39 \cdot 10^{-12}$	$1,69 \cdot 10^{-12}$
		$2,01 \cdot 10^{-12}$	$1,72 \cdot 10^{-12}$	$3,07 \cdot 10^{-12}$	$2,21 \cdot 10^{-12}$
3873	$8,59 \cdot 10^{-13}$	$6,06 \cdot 10^{-13}$	$5,21 \cdot 10^{-13}$	$1,09 \cdot 10^{-12}$	$7,27 \cdot 10^{-13}$
		$8,18 \cdot 10^{-13}$	$7,02 \cdot 10^{-13}$	$1,41 \cdot 10^{-12}$	$9,58 \cdot 10^{-13}$

Умножая (11) на qdq и интегрируя, приходим к уравнению для момента $\bar{q}_i(z, E)$:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial}{\partial z} + \Sigma_i + \sigma_i \right] \bar{q}_i(z, E) - \\ & - \int W_i(E \rightarrow E') \bar{q}_i(z, E') dE' = \\ & = a_i + \sum_{j \neq i} \sigma_{i \rightarrow j} \bar{q}_j(z, E). \end{aligned} \quad (12)$$

Ценность мюона в марковской среде $\bar{q}(z, E)$ и показание детектора J даются выражениями

$$\bar{q}(z, E) = \sum_i p_i \bar{q}_i(z, E),$$

$$J = (\bar{q}, S).$$

Для оценки влияния флуктуаций свойств среды на средние характеристики мюонной компоненты были проведены расчеты вертикальной интенсивности мюонов J в двухкомпонентной марковской среде с параметрами $p_1 = 0,8$, $\rho_1 = 2,32$ г/см³, $(Z/A)_1 = 0,500$, $(Z^2/A)_1 = 5,50$

и $p_2 = 0,2$, $\rho_2 = 4,00$ г/см³, $(Z/A)_2 = 0,494$, $(Z^2/A)_2 = 6,30$, а также интенсивности \bar{J} в среде со средними параметрами (например, $\langle \rho \rangle = p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2$) для спектра S_1 . Зависимость отношения J/\bar{J} от средних размеров фаз $\lambda_i = 1/\sigma_i$ на различных глубинах в грунте представлена в таблице 2. Из анализа этих данных следует, что флуктуации свойств среды приводят к росту интенсивности. При размерах неоднородностей $\lambda \geq (100 \div 400)$ м, характерных для грунта КГФ (табл.1), рост интенсивности превышает 20%.

6. Распределения интенсивностей мюонов в грунте КГФ

Результаты эксперимента на установке КГФ [1,10] представлены аппроксимационной формулой Мияке [10], дающей зависимость интегральной интенсивности мюонов от массовой толщины h , измеряемой в г/см²:

$$I(h) = A(h + H)^{-\alpha} \exp(-\beta h), (\text{см}^2 \cdot \text{ср})^{-1} \cdot \text{ср}, \quad (13)$$

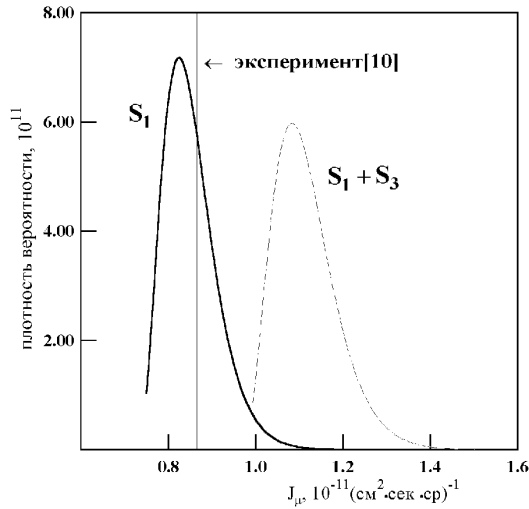


Рис. 3. Распределение интенсивностей мюонов в грунте КГФ. $s=3120$ м. $\langle\tau\rangle=9,31$ км в.э.

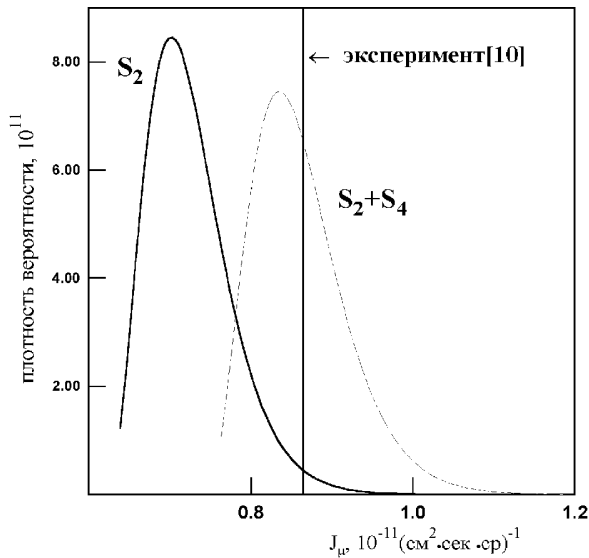


Рис. 4. Распределение интенсивностей мюонов в грунте КГФ. $s=3120$ м. $\langle\tau\rangle=9,31$ км в.э.

где $A = 171 \pm 6$, $\alpha = 2,54 \pm 0,21$, $H = 176 \pm 94$, $\beta = (7,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-4}$. Для интерпретации этих результатов используем расчет интенсивности мюонов в грунте КГФ, произведенный в работе [11], в который заложены четыре дифференциальных спектра мюонов на уровне моря: спектр, полученный в скейлинговом приближении адрон-ядерных взаимодействий [12]

$$S_1(E) = 0,185 [0,68 / (1 + (E + 3,2)/100) + 0,04 / (1 + (E + 3,2)/650)] (E + 3,2)^{-2,65} \times \begin{cases} 1,05, & E \leq 10^2 \text{ ГэВ} \\ 1,15 / (1 + 0,15 \lg(E/20)), & E \geq 10^2 \text{ ГэВ}, \end{cases}$$

спектр, полученный Синеговским С.И. и Наумовым В.А., хорошо описывающий имеющуюся экспериментальную информацию по мюонам на уровне моря [13]

$$S_2(E) = \begin{cases} 2,95 \cdot 10^{-3} E^{-0,3836-1,0824 \lg E+0,132 \lg^2 E}, & E \leq 10^3 \text{ ГэВ}, \\ 14,35 E^{-3,672}, & 10^3 \text{ ГэВ} \leq E \leq 4,162 \cdot 10^5 \text{ ГэВ}, \\ 10^3 E^{-4}, & E \geq 4,162 \cdot 10^5 \text{ ГэВ}; \end{cases}$$

и два спектра прямых мюонов

$$S_3(E) = 3,8 \cdot 10^{-5} E^{-2,5} [14];$$

$$S_4(E) = 4,53 \cdot 10^{-18} \left(\frac{10^5 \text{ ГэВ}}{E} \right)^{2,96} \times \left[1 + \left(\frac{10^5 \text{ ГэВ}}{E} \right)^{1,96} \right]^{-0,152},$$

(рекомбинационная кварк-партоновая модель [15]). По полученным в [11] зависимостям $J(\tau)$ и формуле (9), с приведенными в предыдущем параграфе параметрами, мы получили распределения интенсивностей для спектров S_1 , S_2 , $S_1 + S_3$, $S_2 + S_4$ для различных глубин грунта КГФ. Эти распределения приведены на рис. 3-6, в таблице 3 даны доверительные интервалы $J_{0,025} - J_{0,975}$ для этих спектров.

Как видно из наших данных, лишь расчет для спектра $S_2 + S_4$ согласуется с результатами эксперимента, в то время как спектр $S_1 + S_3$ дает завышенные значения интенсивности. Отметим, что несмотря на самую подробную, среди всех подземных установок, информацию о структуре и составе грунта, разброс интенсивностей мюонов достигает величины 30%-35%.

7. Результаты и выводы

1. В данной работе было рассмотрено прохождение мюонов космических лучей через

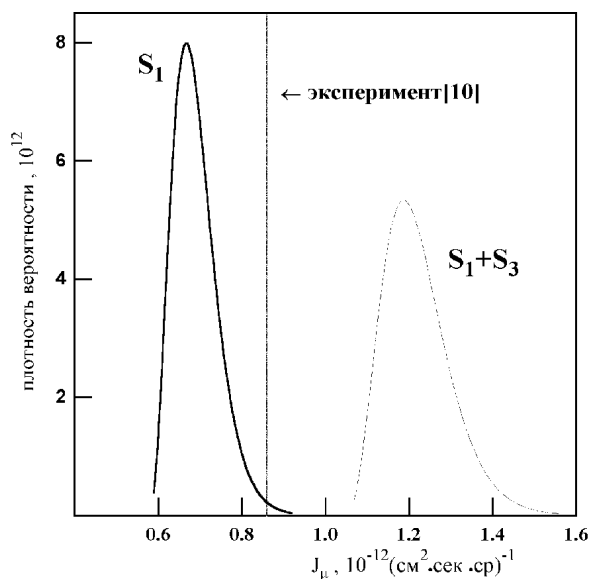


Рис. 5. Распределение интенсивностей мюонов в грунте КГФ. $s=3873$ м. $\langle\tau\rangle=11,55$ км в.э.

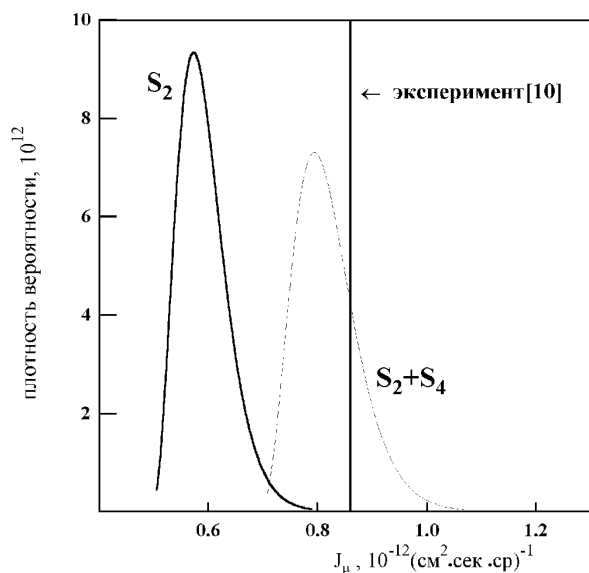


Рис. 6. Распределение интенсивностей мюонов в грунте КГФ. $s=3873$ м. $\langle\tau\rangle=11,55$ км в.э.

среду, свойства которой не определены полностью. Показано, что при такой постановке задачи необходимо вводить статистический ансамбль сред, в котором рассматривается все множество возможных реализаций среды с заданной на этом множестве вероятностью, а экспериментальный результат следует сопоставлять со всем распределением теоретических результатов, порождаемых выбранным ансамблем сред.

2. Выведены уравнения для ценности мюона в марковской среде, с помощью которых проведены оценки влияния флуктуаций свойств грунта на вертикальную интенсивность мюонов.
3. Для расчетов интенсивности мюонов в грунте, свойства которого не определены полностью, предложена многокомпонентная случайная марковская модель грунта и показана ее применимость в случае грунта КГФ. Рассчитано распределение мюонов на больших глубинах в грунте КГФ, обусловленное неопределенностью свойств грунта, даны теоретические оценки разброса интенсивности мюонов на заданном уровне доверительной вероятности при различных предположениях о поведении спектра мюонов на уровне моря.
4. Из сопоставления полученных результатов с фитом экспериментальных данных (13) следует, что из двух рассматриваемых спектров, учитывающих вклад прямых мюонов, не противоречит данным эксперимента спектр $S_2 + S_4$, в то время как спектр $S_1 + S_3$ дает завышенные значения интенсивности. Наш вывод совпадает с выводом полученным в [16].

Литература

1. Miyake S., Narasimham V. S., Ramana Murthy // Nuovo Cim., 1964, v.32, p.1505.
2. Учайкин В.В., Лагутин А.А. Стохастическая ценность. М.: Энергоатомиздат, 1992, 205 с.
3. Castagnoli C., Saavedra O. // Nuovo cim., 1986, v.9C, p.111.
4. Alekseyev E. N., Alexeyenko V. V., Andreyev Yu. M. et.al. // Proc. of 16 ICRC, Kyoto, 1979, v.10, p.276.
5. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло, М.: Наука, 1987, 239 с.
6. Levermore C. D., Pomraning G. C., Sanzo D. L. et.al. // J. Math. Phys., 1986, v.27, p.2526.
7. Vanderhaegen D. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1986, v.36, p.557.
8. Levermore C.D., Wong J., Pomraning G.C. et.al. // J. Math. Phys., 1988, v.29, p.995.
9. Sahni D.C. // Ann. Nucl. Energy, 1989, v.16, p.397.
10. Krishnaswamy M.R., Menon M. G., Narasimham V. S., et.al. // Proc. of 15 ICRC, Plovdiv, 1977, v.6, p.85.
11. Лагутин А.А., Прокопец А.Г., Учайкин В.В. // Изв. АНРАН. Сер. физ., 1994, т.58, с.159.
12. Волкова Л.В., Зацепин Г.Т., Кузьмичев Л.А. // Ядерная физика, 1979, т.29, вып.5, с.1252.
13. Byambajardal L., Naumov V. A., Sinegovsky S.I. // Scient. Trans. of the Inst. of Phys. and Tech., Mongolian Academy of Sciences, Ulan Bator, 1989, № 27, p.44.
14. Volkova L. V., Fulgione W., Galeotti P. et.al. // Nuovo Cim., 1987, v.10C, p.465.
15. Bugaev E. V., Naumov V. A., Sinegovsky S. I. et.al. // Nuovo Cim., 1989, v.12C, p.41.
16. Bugaev E. V., Naumov V. A., Sinegovsky S. I. et.al. // RIKEN Inter. Workshop on Electromagnetic and Nucl. Phen. in High and Extrem. High Energies, Tokyo, 1993, p.264.