УДК 531.0

М.А. Утемесов

ТЕПЛООБМЕН С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ ТЕЛА С МАЛЫМ ВНУТРЕННИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Рассмотрим модель тела с бесконечно малым внутренним сопротивлением цилиндрической симметрии, находящимся в идеальном тепловом контакте с неограниченной внешней средой. Температура внешней среды на бесконечности постоянна. Энтальпия тела меняется периодически по произвольному закону (который может задаваться в аналитической форме или таблично). Необходимо рассчитать изменение температуры тела за произвольный промежуток времени и тепловые потери. Практическим аналогом данной задачи является задача определения теплопотерь теплового аккумулятора энергоавтономного дома [1].

Для определения теплопотерь в среду запишем исходное уравнение (основное уравнение теплопроводности):

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

В зависимости от геометрии уравнение (1) можно трансформировать. Рассмотрим два случая – плоская стенка и цилиндр.

1. Плоская стенка. Уравнение (1) в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

с граничными условиями: $0 < x < \infty$; $0 < t < \infty$

$t = 0$; $T|_s = T_s(0) = 0$

$x = 0$; $T|_s = T_s(t)$;

$x = \infty$; $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$; $T = 0$,

где T – температура грунта; T_s – температура поверхности раздела (относительно температуры грунта); a – температуропроводность среды; t – время.

Ввиду условия бесконечно малого внутреннего сопротивления средняя температура тела равна температуре поверхности раздела.

В соответствии с методикой решения дифференциальных уравнений при помощи представления о дробных производных Летникова, предложенных Ю.И. Бабенко [2], уравнение (2) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}\partial t^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}\partial t^{\frac{1}{2}}} + \frac{\partial}{\partial x}\right)T = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим уравнение, образованное правым множителем (Ю.И. Бабенко показал, что решения с использованием левого множителя лишены физического смысла [2]). Поскольку уравнение

$$\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}\partial t^{\frac{1}{2}}} + \frac{\partial}{\partial x}\right)T = 0 \tag{4}$$

есть дифференциальное уравнение первого порядка по переменной x, мы сразу можем получить значение теплового потока на стенке как функцию времени:

$$-q_s = \lambda F \frac{\partial T_s}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\lambda F \frac{\partial^{\frac{1}{2}} T_s}{\sqrt{a}\,\partial t^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{\lambda F}{\sqrt{\pi a}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

Полученное выражение используем для составления уравнения теплового баланса:

$$q_s + mc_p\frac{dT_s}{dt} \pm C = 0, \tag{5}$$

где первый член – теплопотери; второй член – изменение энтальпии тела; C – суммарная мощность внешнего прихода и расхода тепла.

Примем $A = mc_p$; $B = \lambda F/\sqrt{\pi a}$, тогда интегрирование уравнения (5) даёт

$$AT_s(t)+B\int_0^t\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\int_0^t Cd\tau=0. \quad (6)$$

Представим выражение (6) в следующем виде [5]:

$$AT_s=-B\int_{t-\Delta t}^{t}\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.-$$
$$-\left[B\int_0^{t-\Delta t}\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau-\int_0^{t-\Delta t}Cd\tau\right]+\int_{t-\Delta t}^{t}Cd\tau. \quad (7)$$

Второй интеграл можно представить в виде:

$$\int_0^{t-\Delta t}\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{(t-\Delta t)-(\tau-\Delta t)}}d\tau\approx$$
$$\approx\int_0^{t-\Delta t}\frac{T(\tau)d\tau}{\sqrt{(t-\Delta t)-\tau}},$$

и в этом случае уравнение (7) можно записать как

$$AT_s(t)=-B\int_{t-\Delta t}^{t}\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+AT_s(t-\Delta t)+\int_{t-\Delta t}^{t}Cd\tau,$$

где $T_s(t-\Delta t)$ – температура аккумулятора к началу рассматриваемого периода. Она рассчитывается на предыдущем шаге. Чтобы оценить принятое приближение, проведем следующий анализ. $T_s(\tau)$ – в нашем случае слабоменяющаяся функция от времени. Примем крайний случай – $T_s(\tau)$ = const. Тогда тепловой поток внешних источников уравновесится потоком в грунт и два интеграла в выражении (7) дадут:

$$-B\left[T\sqrt{\Delta t}-T(\sqrt{\Delta t}-\sqrt{t})\right]=-B\sqrt{t},$$

а в приближении (8) $-B(\sqrt{t}+\sqrt{\Delta t})$. Таким образом, вносимая погрешность составит: $\eta=1/2\sqrt{\frac{\Delta t}{t}}$. (Множитель 1/2 обусловлен наличием в уравнениях наряду с потоком в грунт сравнимого по величине потока от внешних источников). Расчет показывает, что при интервале численного счета в один день ошибка будет порядка 9% в первый месяц, 2,5% за год и 1% за 5 лет.

Полученное уравнение (9) – уравнение Вольтерра второго рода. Оно имеет решение в виде суммы бесконечного степенного ряда с монотонно увеличивающимися степенями коэффициента B/A [3]:

$$T_s(t)=\left[\frac{C}{A}\Delta t+T_s(t-\Delta t)\right]\cdot\left[1-\frac{B}{A}\int_{t-\Delta t}^{t}\mathrm{Re}(\tau)d\tau\right], \quad (8)$$

где Re – резольвента с ядром $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$. Интеграл в выражении (8) принимает вид

$$\frac{B}{A}\int_{t-\Delta t}^{t}Re(\tau)d\tau=\frac{B}{A}\left[\int_0^t Re(\tau)d\tau-\int_0^{t-\Delta t}Re(\tau)d\tau\right]=$$
$$=\frac{B}{A}\left(\sqrt{t}-\sqrt{t-\Delta t}\right)+\pi\cdot\left(\frac{B}{A}\right)\cdot(t-\Delta t)$$
$$-2\left(\frac{B}{A}\right)^3\left(t^{1,5}-(t-\Delta t)^{1/5}+\Lambda\right).$$

Если ориентироваться на практический аналог (тело – бак с горячей водой , неограниченная среда – грунт), то отношение B/A будет не более $10^{-4}c^{-1/2}$, и очевидно, что ряд быстро сходится. Оценочные вычисления показали, что можно ограничиться несколькими первыми членами резольвенты. Окончательное выражение можно записать в виде:

$$T_s(t)=\left[\ \frac{C}{A}\Delta t+T_s(t-\Delta t)\ \right]\cdot$$
$$\cdot\left[1-\frac{2B}{A}(\sqrt{t}-\sqrt{t-\Delta t})-\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^2\cdot(\Delta t)+\right.$$
$$+\pi\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^3\cdot(t^{1.5}-(t-\Delta t)^{1.5})+$$
$$\left.+\pi^2\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^4\cdot(t^2-(t-\Delta t^2))-\Lambda\right]. \quad (9)$$

Выражение (9) использовалось для расчета на ЭВМ теплопотерь днища бака-аккумулятора.

2. Цилиндрическая стенка. В этом случае исходное уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \quad (10)$$

с граничными условиями: r = R_o; $-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=q_s(t)$; $r=\infty$ $\frac{\partial T}{\partial r}=0$; T = T_G;

$r\le R_o$ T = T(t) = T_s. (11)

Уравнение (10) можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)T=0 \qquad (12)$$

или в представлении дробных производных Летникова /2/:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty}b_m(r,t)\frac{\partial^{\frac{1-m}{2}}}{\partial t^{\frac{1-m}{2}}}-B(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\right]\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r,t)\frac{\partial^{\frac{1-n}{2}}}{\partial t^{\frac{1-n}{2}}}+A(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\right]T=0, \qquad (13)$$

где a_n, b_m, A, B - коэффициенты, зависящие от координаты и времени t.

Аналогично случаю плоской стенки возьмем только правый сомножитель:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r,t)\frac{\partial^{\frac{1-n}{2}}}{\partial t^{\frac{1-n}{2}}}+A(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\right]T=0. \qquad (14)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относительно r. Из него можно непосредственно определить тепловой поток на стенке:

$$-K(0,t)q_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(0,t)\frac{d^{\frac{1-n}{2}}}{dt^{\frac{1-n}{2}}}T_s. \qquad (15)$$

Расчет коэффициентов K и a_n дает следующие значения:

$$K=\sqrt{a};\quad a_o=1;\quad a_1=\frac{\sqrt{a}}{2R_o};$$

$$a_2=-\frac{1}{8}\frac{a}{R_o^2};\qquad a_3=\frac{1}{8}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{R_o^3};$$

$$a_4=-\frac{23}{128}\frac{a^2}{R_o^4};\qquad a_5=\frac{3}{8}\frac{a^{\frac{5}{2}}}{R_o^5}.$$

Так как температуропроводность грунта *a* имеет порядок 10^{-6}м^2/с и радиус бака-аккумулятора ~ 10м, то каждый последующий член знакопеременного ряда правой части уравнения (15) убывает в 10^{-4} раз. Очевидно, что этот ряд сходится.

Уравнение теплового баланса для цилиндрической стенки будет иметь вид:

$$-\lambda F\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_o}\pm C\ (t)+mc_p\frac{dT_s}{dt}=0$$

или

$$-\lambda F\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(R_o,t)\frac{d^{\frac{1-\square}{2}}}{dt^{\frac{1-n}{2}}}T_s(t)\pm$$
$$\pm C\ (t)+mc_p\frac{dT_s}{dt}=0. \qquad (16)$$

Первый член уравнения (16) представляет собой знакопеременный ряд. Вычислим несколько первых значений:

$$n=0;\quad a_o\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}T_s(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau;$$

$$n=1;\quad a_1\frac{d^0}{dt^0}T_s(t)=\frac{\sqrt{a}}{2R_0}T_s(t);$$

$$n=2;\ a_2\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}T_s(t)=-\frac{1}{8}\frac{a}{R_0^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{T_s(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau;$$

$$n=3;\quad a_3\frac{d^{-1}}{dt^{-1}}T_s(t)=\frac{1}{8}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{R_0^3}\int_0^t T_s(\tau)d\tau.$$

Подстановка этих значений в уравнение (16) приведет к выражению:

$$A\frac{dT_s}{dt}-C(t)-\frac{B}{\sqrt{\pi a}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_s(t)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau-\frac{B}{2R_o}T_s(t)+. \qquad (17)$$

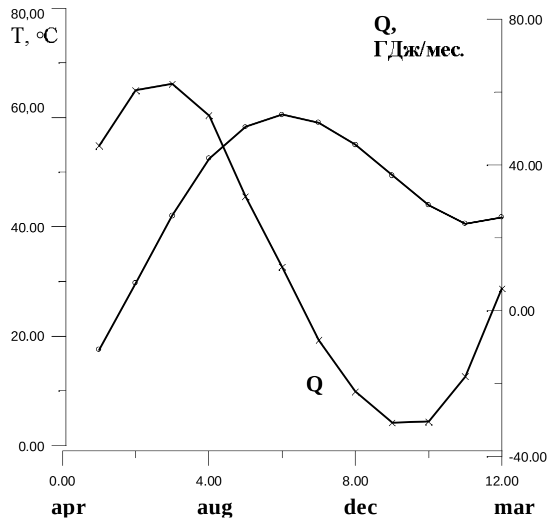
В выражении (17) A = mc_p; B = lF = $2lpR_0H$, H – высота цилиндра.

Сравнивая уравнение (17) с аналогичным уравнением для плоской стенки (6), видим, что в этом случае начиная с 4-го члена добавляется быстросходящийся знакопеременный ряд.

Ввиду сложности аналитического решения уравнения (17) ограничились решением с первыми 4-мя членами, при этом получали решение в плоском варианте (для первых трех членов уравнения (17)), вычисляли температуру стенки T_s, вычисляли 4-й член, который суммировали со вторым, получали новое решение и так методом итераций до заданной сходимости.

3. Полученные результаты были заложены в алгоритм численной программы для

расчета теплопотерь Q в грунт и температуры T воды в сезонном накопителе энергоавтономного дома при длительной (многолетней) эксплуатации. Программа учитывает теплопотери через плоское днище (уравнение (9)) и цилиндрическую стенку (уравнение (17)). Объем бака-аккумулятора составляет 618 м^3, диаметр – 15 м. Первоначальное накопление энергии наиболее выгодно начинать в апреле. В период апрель-сентябрь в ёмкостях накапливается вода с максимальной температурой 80 °С (в первый год максимальная расчетная температура – 60 °С). Затем в осенний период октябрь-декабрь температура в емкостях понижается. Изменение температуры бака – аккумулятора в течение первого года работы показано на рисунке. Как видно из графика, теплопотери в грунт очень значительны только в первый период – при первом нагреве аккумулятора. В дальнейшем теплопотери в грунт значительно уменьшаются, и в течение 3–4-х лет, как показывают расчеты, стабилизируются.



Изменение температуры в бакеаккумуляторе и теплопотерь в грунт в течение первого года работы.

Литература

1. Федянин В.Я. и др. Энергоавтономный дом // Отчет по НИР. №01.960.006231. Барнаул, 1996.

2. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л., 1986.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. М., 1974.

4. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. М., 1979.

5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев, 1978.