УДК 537

Т.К. Кронберг

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЫБРОСОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗА ПОРОГОВЫЙ УРОВЕНЬ

Пространственные выбросы интенсивности при прохождении излучения через однородную изотропную слаботурбулентную среду могут привести к улучшению переноса энергии через просветляемый капельный аэрозоль [1], к снижению порога пробоя [2] по сравнению с регулярной средой. В слаботурбулентной среде флуктуации логарифма интенсивности электромагнит-ной волны имеют нормальное распределение. Характер самовоздействия лазерного излучения зависит от статистических характеристик пространст-венных выбросов интенсивности; средней площади выброса, среднего объема, ограниченного поверхностью и плоскостью на уровне и среднего расстояния между выбросами, среднего числа таких выбросов на единице площади. Получение точного решения для оценки вероятности выброса интенсивности за высокий уровень наталкивается на значительные трудности. Вычисление остальных перечисленных характеристик пространственных выбросов требует вычисления второй производной корреляционной функции флуктуаций интенсивности, что также связано с определенными трудностями [3]. В [4] получена асимптотическая оценка для вероятности выхода реализации гауссовского случайного поля за высокий уровень.

В настоящей работе предлагается оценивать вероятность выхода за высокий уровень реализации случайного поля численным методом, используя модификацию метода случайной выборки [5]. Первоначально рассмотрим близкую к реальной модельную задачу для случайной величины ξ с гауссовской плотностью распределения p(x), с математическим ожиданием $M\xi = 0$ и дисперсией $D\xi = 1$. Вероятность $P(\xi \geq u)$ выброса случайной величины ξ за высокий уровень u согласно методу существенной выборки равна

$$P(\xi \geq u) = M\chi(t) = \int_u^{\infty} \frac{p(x)}{f(x,t)} f(x,t)dx, \quad (1)$$

где χ – случайная величина, равная

$$\chi(t) = \begin{cases} p(x)/f(x,t), & \text{если } \xi \geq u \\ 0, & \text{если } \xi < u \end{cases} \quad (2)$$

с плотностью распределения

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-x^2/2t^2).$$

Оптимальный параметр t выбирается из условия минимума дисперсии $D(\chi(t))$. Теоретически можно показать, что применение метода существенной выборки приводит к значительному выигрышу в объеме работы. Относительная ошибка оценки интеграла (1) равна

$$\varepsilon = \left(\frac{D\xi}{N}\right)^{1/2}, \quad (3)$$

где N – число независимых реализаций случайной величины χ.

Оценим дисперсию случайной величины χ из (2)

$$D(\chi(t)) = M\chi^2 - (M\chi)^2 = = \int_u^{\infty} \left[\frac{p(x)}{f(x,t)}\right]^2 f(x,t)dx - \left(\int_u^{\infty} p(x)dx\right)^2, \quad (4)$$

где $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp(-x^2/2\sigma^2)$.

Для оценки дисперсии (4) применим неравенство

$$\frac{1}{x + (x^2+2)^{1/2}} \leq e^{x^2} \int e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{x + (x^2 + \frac{4}{\pi})^{1/2}}. \quad (5)$$

При $P(\xi \geq u) \ll 1$ вторым членом в (4) можно пренебречь, тогда

$$D(\chi(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha(t)\sigma^2}\int_{\alpha u}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

где $\alpha^2(t) = (2t^2 - \sigma^2)/(2t^2\sigma^2)$.

Рассмотрим случайную величину

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & если\ \xi \ge u \\ 0, & если\ \xi < u \end{cases}$$

с плотностью распределения p(x). Тогда дисперсия введенной случайной величины есть

$$D\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta\sigma}\int_{u\beta}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad (6)$$

где $\beta = (\sqrt{2}\,\sigma)^{-1}$.

При одинаковом числе реализаций случайной величины χ и η отношение относительных ошибок оценки интеграла (1) по формуле (3) равно

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{D\chi}{D\eta}\right)^{1/2} = \frac{t^{3/2}e^{-\frac{u^2}{2}(\alpha^2(t)-\beta^2)}}{(2t^2-\sigma^2)^{1/2}\sqrt{\sigma}}.$$

При фиксированных t и σ метод существенной выборки дает уменьшение погрешности по экспоненте $\exp(-u^2(\alpha^2-\beta^2)/2)$. Применим модификацию этого метода для оценки вероятности выброса за высокий уровень $I_{пор}$ реализации однородного гауссовского поля $\xi_N(x)$ и $x \in R^2$ с математическим ожиданием $M\xi = 0$, дисперсией $D\xi=1$, корреляционной функцией R(x)и спектральной плотностью F(x). Моделирование однородного гауссовского поля проводим по методу, предложенному в работе [6],

$$\xi_N(x) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i \sin((V_i, x) + \frac{\pi}{4}),$$

где z_i – случайная величина со средним $Mz_i = 0$, дисперсией $Dz_i = 1$ с равномерной плотностью распределения на отрезке $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,]$; V_i – случайный двумерный вектор с плотностью распределения, равной спектральной плотности моделируемого поля F(x); z_i; V_i – статистически независимые в совокупности реализации случайной величины $\vec{Z} = (Z_1,\dots,Z_N)$ и вектора $\vec{V}$. Реализации случайного поля получаем на двумерной сетке

$$D \in [-X, X] \times [-Y, Y].$$

Пусть случайная величина $y_i = \sin((V_i, x) + \frac{\pi}{4})$ имеет плотность распределения $q(y_i)$. Введем случайную величину

$$\chi(\vec{z}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & если\ \xi_N(x) \ge u \\ 0, & если\ \xi_N(x) < u \end{cases},$$

где $\vec{y} = (y_1, \dots, y_N)$.

Тогда вероятность выхода реализации случайного поля за уровень $I_{пор}$ задается интегралом

$$P(\max_{x\in D} \xi_N(x) \ge I_{пор}) = M\chi =$$

$$= \iint_{R^N \times R^N} \chi(\vec{z}, \vec{y}) \prod_{i=1}^{N} p(z_i) \prod_{i=1}^{N} q(y_i)\, d\vec{z}\, d\vec{y}.$$

Согласно методу существенной выборки [5], рассмотрим случайную величину

$$\eta(\vec{z}, \vec{y}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N} \frac{p(z_i)}{b(z_i, \vec{\alpha})} & если\ \xi_N \ge I_{пор} \\ 0, & если\ \xi_N < I_{пор} \end{cases},$$

где $b(z_i, \vec{\alpha})$ – новая плотность распределения случайной величины z_i на отрезке $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,]$, $\vec{\alpha}$ – вектор параметров. Плотность $b(z_i, \vec{\alpha})$ симметрична относительно оси ординат и монотонна на $[0, \sqrt{3}]$. Тогда имеем

$$M\eta = \iint_{R^N \times R^N} \eta(\vec{z}, \vec{y}, \vec{\alpha}) \prod_{i=1}^{N} q(y_i) \prod_{i=1}^{N} b(z_i, \vec{\alpha})\, d\vec{z}\, d\vec{y} =$$

$$= P(\max_{x\in D} \xi_N(x) \ge I_{пор}) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(\vec{z}, \vec{y}, \vec{\alpha}) / M_0,$$

где M_0 – число реализаций случайной величины η. Модельные численные расчеты для двумерного гауссовского поля с корреляционной функцией $R(x) = \exp(-\beta|x|^2/2)$ дали уменьшение дисперсии в два раза при совпадении расчетов.

Предложенный метод позволяет одновременно вести расчет различных статистических характеристик, представляющих интерес для оценки вероятности развития оптического пробоя, таких как площадь, объем выброса, среднее число выбросов на единице площади, единице длины при различных значениях структурной функции C_n для широкого или сфокусированного пучка. Корреляционная функция флуктуаций интенсивности является эмпирической функцией, для которой операция дифференцирования является некорректной, а известные формулы по расчету перечисленных статистических функционалов содержат ее вторую производную.

Литература

1. Алмаев Р.Х., Семенов Л.П., Слесарев А.Г. Прохождение излучения с пространственными выбросами интенсивности через капельный аэрозоль // Тез. докл. 3 Всесоюз. совещ. по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Ч. 4. Обнинск, 1985.
2. Сорокин Ю.М., Черемухин А.М. Пороговые и структурные особенности аэрозольного оптического пробоя в полях с пространственными выбросами интенсивности // Тез. докл. 3 Всесоюз. совещ. по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Ч.4. Обнинск, 1985
3. Зуев В.Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере. М., 1981.
4. Беляев Ю.К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1970. №2.
5. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М, 1979.