УДК 514.75

О.С. Голышева

Об одном свойстве $(n-2)$-каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n

Рассмотрим гиперповерхность M^{n-1} в евклидовом пространстве E^n.

Обозначим $F(M^{n-1})$ — R-алгебру дифференцируемых на M^{n-1} функций, $T^q_s(M^{n-1})$ — F - модуль дифференцируемых на M^{n-1} тензорных полей типа (q,s), $\chi(M^{n-1})$ — алгебру Ли векторных полей на M^{n-1}, ∂ — дифференцирование и $<,>$ — скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M^{n-1} имеют вид [1, с. 36]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n; \qquad (1)$$

$$\partial_X n = -AX,$$

где $A \in T^1_1(M^{n-1})$, $X,Y \in \chi(M^{n-1})$, $\beta \in T^0_2(M^{n-1})$, $\beta(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма A — оператор Вейнгартена, ∇— связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) =< X,Y >$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y)Z = \beta(Y,Z)AX - \beta(X,Z)AY; \qquad (2)$$

$$dA(X,Y) = 0, \beta(X,Y) = g(AX,Y),$$

где $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ — тензор кривизны связности $\bigtriangledown$, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ — внешний дифференциал поля A в связности $\bigtriangledown$.

Гиперповерхность M^{n-1}, являющаяся огибающей 1-параметрического семейства гиперсфер, называется $(n-2)$-каналовой. Она несет $(n-2)$-мерные сферические образующие. В работе В.И.Ведерникова [2, с. 89] доказано,что гиперповерхность M^{n-1} является $(n-2)$-каналовой в том случае, когда оператор Вейнгартена имеет $(n-2)$-кратное собственое значение.

Пусть оператор Вейнгартена в каждой точке $P \in M^{n-1}$ имеет собственные значения λ и μ, причем, λ — кратности $n-2$.

Тогда на M^{n-1} определены два распределения:

$$\Delta^{\top}(P) = \{X \in T_p M^{n-1} : AX = \lambda X\},$$

размерности $n-2$ и ему ортогональное

$$\Delta^{\perp}(P) = \{Y \in T_p M^{n-1} : AY = \mu Y\}$$

размерности 1.

Для $X,Y \in \Delta^{\top}$ в силу (3) имеем

$dA(X,Y) = \nabla_X\lambda Y - \nabla_Y\lambda X - \lambda[X,Y]^{\top} - \mu[X,Y]^{\perp} = (X\lambda)Y - (Y\lambda)X + (\lambda-\mu)[X,Y]^{\perp} = 0.$ Отсюда при $n > 3$ получим $[X,Y]^{\perp} = 0$, где $X,Y \in \Delta^{\top}$, что означает инволютивность распределения $\Delta^{\top}$ и

$$X\lambda = 0, X \in \Delta^{\top}. \qquad (3)$$

$\Delta^{\perp}$ инволютивно как одномерное распределение.

Для $X \in \Delta^{\top}, Y \in \Delta^{\perp}$ имеем $dA(X,Y) = \nabla_X \mu Y - \nabla_Y \lambda X - \lambda[X,Y]^{\top} - \mu[X,Y]^{\perp} = (X\mu)Y - (Y\lambda)X + \mu\nabla_X Y - \lambda\nabla_Y X - \lambda[X,Y]^{\top} - \mu[X,Y]^{\perp} = 0$. Раскладывая $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ на касательные и нормальные составляющие, получим

$$(\nabla_X Y)^{\top} = \frac{(Y\lambda)X}{(\mu-\lambda)}; \qquad (4)$$

$$(\nabla_Y X)^{\perp} = \frac{(X\mu)Y}{(\lambda-\mu)}.$$

Нормируем вектор $Y \in \Delta^{\perp}$, т.е. положим $g(Y,Y) = 1$. Дифференцируя равенство вдоль $Y \in \Delta^{\perp}$, получим

$2g(\nabla_Y Y, Y) = 0$, что означает

$$\nabla_Y Y = (\nabla_Y Y)^{\perp}. \qquad (5)$$

Распределение Δ называется параллельным [1, с.44], если $X \in \Delta$, то $\nabla_Y X \in \Delta$, где $Y \in \chi(M^{n-1})$

ЛЕММА 1. *Условия параллельности для $\Delta^{\top}$ и $\Delta^{\perp}$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $g(Y,X) = 0$, где $X \in \Delta^{\top}$ и $Y \in \Delta^{\perp}$ Дифференцируя равенство вдоль $Z \in \chi(M^{n-1})$, получим

$$g(Y, \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Z Y) = 0. \qquad (6)$$

Из условия параллельности $\Delta^{\top}$ следует, что $g(Y,\nabla_Z X) = 0$, следовательно, из (6) имеем $g(X,\nabla_Z Y) = 0$, т.е.$\nabla_Z Y \in \Delta^{\perp}$ в силу произвольности векторного поля $X \in \Delta^{\top}$, что означает параллельность $\Delta^{\perp}$. Обратно, пусть $\Delta^{\perp}$ параллельно, тогда

$g(X,\nabla_Z Y) = 0$, где $X \in \Delta^{\top}$, $Y \in \Delta^{\perp}$, $Z \in \chi(M^{n-1})$.

Из (7) в этом случае получаем, что $g(Y,\nabla_Z X) = 0$, то есть $\nabla_Z X \in \Delta^{\top}$, где $Z \in$

$\chi(M^{n-1})$. Таким образом получены условия параллельности $\Delta^{\top}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если распределения $\Delta^{\top}$ и $\Delta^{\perp}$ параллельны, то для тензора кривизны $R(X,Y)Y=0$, где $X\in\Delta^{\top}$, $Y\in\Delta^{\perp}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий параллельности распределений имеем:

$$(\nabla_Y X)^{\perp}=0,(\nabla_X Y)^{\top}=0,(\nabla_X X)^{\perp}=0,(\nabla_Y Y)^{\top}=0, \tag{7}$$

где $X\in\Delta^{\top}$, $Y\in\Delta^{\perp}$. Из формул (5) и (7)

$$\nabla_Y Y=\nabla_Y Y^{\top}+\nabla_Y Y^{\perp}=0. \tag{8}$$

Рассмотрим

$R(X,Y)Y=\nabla_X\nabla_Y Y-\nabla_Y\nabla_X Y-\nabla_{[X,Y]}Y=-\nabla_Y(\nabla_X Y)^{\perp}-\nabla_{(\nabla_X Y)^{\perp}}Y+\nabla_{(\nabla_Y X)^{\top}}Y.$

Так как $(\nabla_X Y)\in\Delta^{\perp}$, то $\exists\phi$, такое, что $\nabla_X Y=\phi Y$, где $\phi=g(\nabla_X Y,Y)$.

Тогда в силу (7)

$R(X,Y)Y=-\phi\nabla_Y Y-(Y\phi)Y-\phi\nabla_Y Y+(\nabla_{(\nabla_Y X)^{\top}}Y)^{\perp}=-(Y\phi)Y+(\nabla_{(\nabla_Y X)^{\top}}Y)^{\perp}$

Следовательно, $R(X,Y)Y\in\Delta^{\perp}$.

С другой стороны, по (2)

$$R(X,Y)Y=\beta(Y,Y)AX=\lambda\mu X, X\in\Delta^{\top} \tag{9}$$

Т.е. $R(X,Y)Y\in\Delta^{\top}$. Следовательно, $R(X,Y)Y=0$,где $X\in\Delta^{\top},Y\in\Delta^{\perp}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Для каналовой гиперповерхности при $(n>3)$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) распределение $\Delta^{\top}$ параллельно;

2) M^{n-1} локально есть гиперцилиндр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Delta^{\top}$ параллельно, тогда по лемме1 и $\Delta^{\perp}$ параллельно, следовательно, по лемме2 $R(X,Y)Y=0$, где $X\in\Delta^{\top},Y\in\Delta^{\perp}$, по $(9)\lambda\mu X=0$, но $\lambda/=0$, отсюда $\mu=0$. В силу (8) из (5) следует, что $Y\lambda=0,Y\in\Delta^{\perp}$, но из $(3)X\lambda=0,X\in\Delta^{\top}$, тогда $\lambda=$const. В этом случае оператор Вейнгартена имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\ddots&&\\&&\lambda&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

Итак, мы получили частный случай каналовой гиперповерхности, которая является огибающей однопараметрического семейства гиперсфер постоянного радиуса $R=\frac{1}{\lambda}$. Так как из (1) и $(9)\partial_Y Y=g(AY,Y)n=\mu n=0$ Следовательно, M^{n-1} — локально гиперцилиндр, образующие которого прямые, а направляющие $(n-2)$ — сферы постоянного радиуса.

Обратно, пусть M^{n-1}— локально гиперцилиндр. Пусть $X\in\Delta^{\top},Y\in\Delta^{\perp}$, рассмотрим $\nabla_X Y=(\nabla_X Y)^{\top}+(\nabla_X Y)^{\perp}$ в силу условия $\lambda=$const из (7) в силу (4) получим

$$\nabla_X Y=\nabla_X Y^{\perp}, X\in\Delta^{\top}. \tag{10}$$

Рассмотрим $\nabla_Y Y=\partial_Y Y-\beta(Y,Y)n$, в силу (2)

$$\nabla_Y Y=-\mu n=0, \tag{11}$$

таким образом из (10) и (11) распределение $\Delta^{\perp}$ параллельно. Теорема доказана.

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 2.
2. Ведерников В.И. Поверхности, огибающие семейство гиперсфер // Известия высших учебных заведений. Математика. 1957. №1.