УДК 519.48

Е.П. Петров

Некоторые свойства почти коммутативных многообразий алгебр

В настоящей работе рассматриваются многообразия $GF(p)$-алгебр (p – простое число). Многообразие алгебр $\mathcal{M}$ называется почти коммутативным, если $\mathcal{M}$ — некоммутативное многообразие, а каждое собственное подмногообразие $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ является коммутативным. Такие многообразия и их свойства изучались в работах [1, с. 1086-1096; 2, с. 669-676; 3]. Здесь мы продолжим эти исследования.

Обозначим через $\mathcal{M}_1 \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2$ класс алгебр $R \in \mathcal{M}$ таких, что существует идеал $I \triangleleft R$, принадлежащий $\mathcal{M}_1$, и $R/I \in \mathcal{M}_2$. Ясно, что такой класс является многообразием. (Произведение "$\circ$" введено А.И. Мальцевым [4, с. 346-365]. Если $\mathcal{M}$ совпадает с многообразием всех ассоциативных алгебр характеристики p, то положим $\mathcal{M}_1 \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$. Многообразие $\mathcal{M}$ называется неразложимым, если оно не представляется в виде $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ – нетривиальные собственные подмногообразия многообразия $\mathcal{M}$.

Теорема 1. *Всякое почти коммутативное многообразие $GF(p)$-алгебр неразложимо.*

Доказательство. Согласно результатам работы [1] каждое почти коммутативное многообразие $\mathcal{M}$ совпадает с одним из следующих многообразий:

1) $varA_1$ (либо $varA_1^{op}$),
где $A_1 = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и A_1 удовлетворяет тождествам

$$px = [x,y]z = 0;$$
$$(x^p - x)y = 0. \qquad (1)$$

2) $varA_2$ (либо $varA_2^{op}$),
где $A_2 = GF(p)\langle\rho,\sigma\rangle$ с образующими ρ, σ такими, что $\sigma^2 = \sigma\rho - \rho^{p^t}\sigma = 0$, $t = nq^{l-1}$, $1 \leq n \leq q$, $l \geq 1$, q – простое число. Причем $A_2/J(A_2) \cong GF(p^{q^l})$. Алгебра A_2, в частности, удовлетворяет следующим тождествам:

$$px = [x,y][u,v] = 0;$$
$$(x - x^{p^{q^l}})(x - x^{p^{q^{l-1}}}) = 0; \qquad (2)$$
$$(x - x^{p^{q^l}})(y - y^{p^{q^l}}) = 0. \qquad (3)$$

3) M – почти коммутативное нильпотентное индекса n многообразие $GF(p)$-алгебр, которые удовлетворяют, в частности, следующему тождеству:

$$[x,y] + \sum \alpha_i x^i y^{n-i-1} = 0,\ \alpha_i \in GF(p). \qquad (4)$$

Предположим, рассуждая от противного, что многообразие $\mathcal{M}$ разложимо: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$. Тогда, учитывая, что $T(\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2) = \{f(g_1,\ldots,g_t);\ f(x_1,\ldots,x_t) \in T(\mathcal{M}_1),\ g(x_1,\ldots,x_s) \in T(\mathcal{M}_2)\}^T$, замечаем, что любое из тождеств (1),(3) или (4), левая часть которого принадлежит $T(\mathcal{M})$, совпадает с тождеством $f(g_1,\ldots,g_t) = 0$ лишь тогда, когда $f = x + h(x)$, $g = xy + \alpha yx + u(x,y)$, где $deg\ h(x) \geq 2$, $deg\ u(x,y) \geq 3$, $\alpha \in GF(p)$, или $f = xy + \alpha yx + u(x,y)$, $g = x + h(x)$.

Предположим сначала, что $\mathcal{M}$ – нильпотентное. Тогда, поскольку $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ также нильпотентны как подмногообразия нильпотентного многообразия, то тождество $x + h(x) = 0$ принимает тривиальный вид $x = 0$, и одно из подмногообразий – $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$ – тривиально. Противоречие.

Предположим теперь, что $\mathcal{M}$ ненильпотентное. Тогда либо $A_1 \in \mathcal{M}$, либо $A_2 \in \mathcal{M}$. Причем алгебра A_i, $i = 1,2$, являясь локальной алгеброй, содержит единственный идеал $J = J(A_i)$ и $J^2 = 0$. Следовательно, $J \in \mathcal{M}_1$ и $T(\mathcal{M}_1)$ не может содержать полином вида $x + h(x)$. Поэтому $\mathcal{M}_1 \ni f = xy + \alpha yx + u(x,y)$, $\mathcal{M}_\in \ni g = x + h(x)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{M} = varA_1$ и $xy - x^p y \in T(\mathcal{M})$. Рассмотрим также полином $g = x + h(x) \in \mathcal{M}_2$. Используя определитель Вандермонда, получим $g_1 = x + \beta x^p + h_1(x) \in \mathcal{M}_2$, где $deg\ h_1(x) > p$. Учитывая тот факт, что $xy - x^p y = f(g_1(x), g_1(x))$, замечаем, что степень g_1 не может превышать число p, поэтому $x + \beta x^p \in T(\mathcal{M}_2)$. Поскольку $A_1/J(A_1) \cong GF(p) \in \mathcal{M}_2$, то $\alpha \equiv -1(modp)$ и $x - x^p \in \mathcal{M}_2$. Итак, $T(\mathcal{M}_2) \supseteq \{px = x - x^p\}^T = T(GF(p))$ и, так как $varGF(p)$ – атом, то $\mathcal{M}_2 = varGF(p)$. Рассуждая аналогично, после применения определителя Вандермонда получим $f_1(x,y) = xy + \alpha yx \in T(\mathcal{M}_1)$. Из равенства $f_1(x - x^p, y - y^p) = xy - x^p y$ вытекает, что $xy \in T(\mathcal{M}_1)$, и поэтому $\mathcal{M}_1 = var\langle px = xy = 0\rangle$. Окончательно имеем $T(\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2) = \{px,\ xy\}^T \circ \{px,\ x - x^p\}^T = \{px,\ (x - x^p)(y - y^p)\}^T$. Ясно, что $T(\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2) \subseteq T(A_1) = T(\mathcal{M})$, но обратное включение неверно,

так как алгебра $\begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & GF(p) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$, но не лежит в $varA_1$ (действительно, $e_{12}e_{22} - e_{12}^p e_{22} = e_{12} \neq 0$). Полученное противоречие позволяет сделать вывод, что $varA_1$ неразложимо.

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathcal{M} = varA_2$ и $(x - x^{p^{q^l}})(y - y^{p^{q^l}}) \in T(\mathcal{M})$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим $\mathcal{M}_1 = var\langle px = xy = 0\rangle$, $(x - x^{p^{q^l}}) \in T(\mathcal{M}_2)$. Кроме того, напомним, что $T(\mathcal{M}) = T(A_2)$ содержит полином вида $(x - x^{p^{q^l}})(x - x^{p^{q^{l-1}}})$ (см. тождество (2)). Откуда легко видеть, что $T(\mathcal{M}_2)$ содержит также полином $(x - x^{p^{q^{l-1}}})$. Отсюда следует, что поле $A_2/J(A_2) = GF(p^{q^l}) \in \mathcal{M}_2$ удовлетворяет тождеству $(x - x^{p^{q^{l-1}}}) = 0$. Противоречие.

Теорема доказана.

Рассмотрим класс всех почти коммутативных многообразий $GF(p)$-алгебр $\{\mathcal{M}_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots\}$. Этот класс – счетное множество, так как каждое почти коммутативное многообразие порождается одной конечной алгеброй [1]. Обозначим через $\mathcal{G} = \langle \mathcal{M}_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots;\ \circ\rangle$ – группоид, порожденный всеми почти коммутативными многообразиями $GF(p)$-алгебр.

Теорема 2. *При $p > 2$ группоид $\mathcal{G}$ не является полугруппой.*

Доказательство. Рассмотрим следующие почти коммутативные многообразия:

$$\mathcal{A} = varA_1 = var\begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = var\langle px = [x, y]z = xy - x^p y = 0\rangle;$$

$$\mathcal{N} = var\langle px = [x, y] + x^p y = x_1 x_2 \dots x_{p+2} = 0\rangle.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N}\mathcal{A} \neq \mathcal{N}^2\mathcal{A}$. Далее применяем рассуждения, аналогичные приведенным в работе [5, с. 989-992].

Непосредственными вычислениями нетрудно получить все порождающие T-идеала $T(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}\mathcal{A})$. Приведем только те, минимальная степень которых не превышает 10:

$$[y_1^{\varepsilon_1}[x_1x_2,\ x_3x_4]y_2^{\varepsilon_2},\ y_3^{\varepsilon_3}[x_5x_6,\ x_7x_8]y_4^{\varepsilon_4}] + u,$$

где y_k – переменные, не встречающиеся в записи полиномов из $T(\mathcal{N}\mathcal{A})$, $\varepsilon_k = 0$ или 1; u – полином, каждый моном которого содержит хотя бы одну переменную в p-й степени. (Остальные порождающие T-идеала $T(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}\mathcal{A})$ имеют следующие минимальные степени:
$4(p+2),\ 6(p+2),\ 2(p+2)^2,\ 3(p+2)^2$).

Также выпишем все порождающие T-идеала $T(\mathcal{N}^2\mathcal{A})$, минимальная степень которых не превышает 10:

$$[(y_1y_2)^{\varepsilon_1}[x_1x_2,\ x_3x_4](y_3y_4)^{\varepsilon_2},$$

$$(y_5y_6)^{\varepsilon_3}[x_5x_6,\ x_7x_8](y_7y_8)^{\varepsilon_4}] + v,$$

где y_k, v определяется также, как в предыдущем случае.

Заметим, что для любых многообразий $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$: $\mathcal{M}_1\cdot\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 \subseteq \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\cdot\mathcal{M}_3$. Поэтому нам достаточно доказать строгое включение $\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}\mathcal{A} \subset \mathcal{N}^2\mathcal{A}$ или $T(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}\mathcal{A}) \supset T(\mathcal{N}^2\mathcal{A})$.

Рассмотрим элемент

$$f = [[x_1x_2,\ x_3x_4]y_1,\ [x_5x_6,\ x_7x_8]y_2] + u \in T(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}\mathcal{A}).$$

Докажем, что f не принадлежит $T(\mathcal{N}^2\mathcal{A})$. Для этого достаточно доказать, что тождество $f = 0$ не вытекает из тождеств:

$$[[x_1x_2,\ x_3x_4],\ [x_5x_6,\ x_7x_8]] + v_1 = 0;$$

$$[[x_1x_2,\ x_3x_4]y_1y_2,\ [x_5x_6,\ x_7x_8]] + v_2 = 0;$$

$$[y_1y_2[x_1x_2,\ x_3x_4],\ [x_5x_6,\ x_7x_8]] + v_3 = 0.$$

Пусть G – алгебра Грассмана над полем $GF(p)$ от порождающих $e_1, e_2, \dots, e_{14}$. Известно, что она удовлетворяет тождествам: $px = x^p = [x, y, z] = x_1x_2 \dots x_{15} = 0$, поэтому она удовлетворяет тождествам (5).

Сделаем в тождестве $f = 0$ следующую подстановку:

$$x_1 = e_1e_2,\ x_2 = e_3,\ x_3 = e_4e_5,\ x_4 = e_6,\ y_1 = e_7,$$

$$x_5 = e_8e_9,\ x_6 = e_{10},\ x_7 = e_{11}e_{12},\ x_8 = e_{13}, y_2 = e_{14},$$

получим

$$[[e_1e_2\cdot e_3,\ e_4e_5\cdot e_6]e_7,\ [e_8e_9\cdot e_{10},\ e_{11}e_{12}\cdot e_{13}]e_{14}] +$$

$$+ u(e_i) = 8e_1e_2\dots e_{14} \neq 0,$$

где u обращается в нуль в силу тождества $x^p = 0$ в алгебре G. Таким образом, $f \notin T(\mathcal{N}^2\mathcal{A})$.

Теорема доказана.

Литература

1. Мальцев Ю.Н. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец // Сиб. мат. журнал. 1976. Т. 17. №5.
2. Мальцев Ю.Н. Некоторые примеры многообразий ассоциативных колец // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. №6.

3. Петров Е.П. О почти коммутативных многообразиях колец // Деп. ВИНИТИ. 21.05.96, №1506 - В 96.

4. Мальцев Ю.Н. Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. мат. журнал. 1967. Т. 8. №2.

5. Гаврилов М.Б. О многообразиях ассоциативных алгебр // Доклады Болг. акад. наук. 1968. Т. 21. №10.