УДК 514.45

О.С. Пермина, В.В. Славский[1]

Нахождения степени векторного поля в математических пакетах Derive 2.0 и Mathematica 2.2

Введение

Рассмотрим сначала понятие степени векторного поля для плоскости. Пусть задано непрерывное векторное поле $V = (V_1, V_2)$ на плоскости R^2

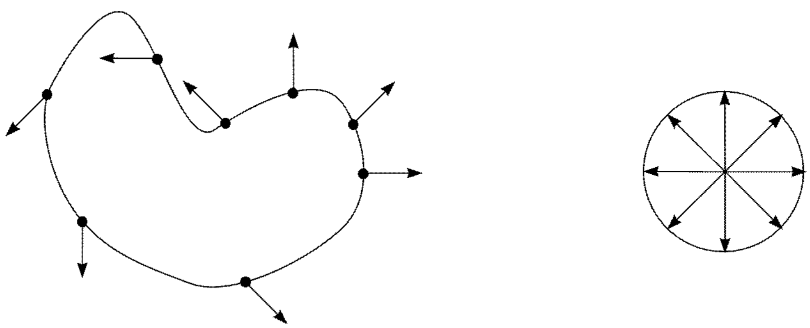
$$\begin{cases} V_1 = V_1(x_1, x_2) \\ V_2 = V_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad V_i \in C(R^2).$$

Предположим, что на замкнутой кривой $\gamma = \{x(t) : t \in S^1\}$ векторное поле не обращается в нуль (где $x : S^1 \to R^2$ непрерывное отображение, а S^1 единичная окружность). Тогда определено непрерывное отображение $n : S^1 \to S^1$

$$n(t) = \frac{V(x(t))}{||V(x(t))||}.$$

Определение. *Степенью (или вращением) векторного поля $\vec{V}$ на кривой γ называют степень отображения $n : S^1 \to S^1$.*

Замечание. *Наглядно степень отображения $n : S^1 \to S^1$ есть число полных "оборотов" вектора $n(t)$ вокруг начала координат.*



Степень векторного поля равна 1

Для гладкого отображения $f : M^k \to N^k$ компактного k-мерного ориентированного многообразия M^k в компактное k-мерное ориентированное многообразие N^k степень определяется [1], как число точек в прообразе регулярной относительно f точки $y_0 \in N^k$ (с учетом знака), именно

$$\deg(f) = \sum_{f(x)=y_0} \operatorname{sign} \det ||\mathrm{f}'(\mathrm{x})||. \qquad (1)$$

Условие регулярности точки $y_0 \in N^k$ по отношению к отображению f состоит в том, что $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, $det||f'(x)|| \neq 0$ (отсюда следует конечность точек прообраза $f^{-1}(y_0)$).

Замечание. *Другими словами, число* $\deg(\mathrm{f})$ *показывает, сколько раз "покроется" многообразие N при отображении f.*

В основном степень отображения (векторного поля) применяют при доказательстве теорем существования решения или при локализации решения [1]. Основаны эти приложения на одном общем факте, который мы сформулируем для простоты только в случае векторного поля на плоскости.

Теорема. *Пусть $V : D \to R^2$ — векторное поле, определенное в области D, с кусочно гладкой границей ∂D. Если* $\deg_{\partial \mathrm{D}} \neq 0$*, то* $\exists x_0 \in D : V(x_0) = 0$.

В частности идея данной работы возникла при исследовании системы диофантовых уравнений, связанных с задачами классификации однородных Эйнштейновых метрик [2, с. 123-136].

Алгоритм нахождения степени векторного поля

Возникает проблема эффективного подсчета степени отображения. Непосредственно формулу (1) использовать трудно, так как надо найти прообразы хотя бы одной регулярной точки,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00436). Данные исследования поддержаны грантовым центром при Санкт-Петербургском государственном университете.

а это равносильно решению системы уравнений $f(x) = y_0$. В данной работе предложен алгоритм, основанный на формуле

$$\deg(f) = \frac{\int_M f^* \omega}{\int_N \omega}, \qquad (2)$$

где ω — замкнутая k форма на многообразии N^k, являющаяся образующей в группе когомологий Де Рама $H^k(N, R)$. Например, для $N = S^k$ можно взять ω элемент объема на сфере. Алгоритм реализован в системах компьютерной алгебры Derive 2.2 и Mathematica 2.2.

Рассмотрим пространство R^n. В качестве области D возьмем прямоугольный параллелепипед, который задан координатами левой нижней и правой верхней вершин $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$. При этом предполагается, что векторное поле $V(x) = \{V_1(x), \ldots, V_n(x)\}$ не обращается в нуль на границе $S = \partial D$. Тогда степень V можно найти как интеграл

$$\deg(V) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_S \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{k-1} V_k dV_1 \wedge dV_2 \wedge \ldots d\hat{V}_k \cdots \wedge dV_n}{(\sum_{i=1}^n V_i^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

В приложении приведены программа для вычисления степени векторного поля на плоскости с помощью пакета Derive и программа на языке пакета Matematica 2.2. [6] для вычисления степени в пространстве произвольной размерности. Фактически эта программа была опробована на персональном компьютере с процессором Intel 80486 и достаточно уверенно считала в размерностях 3 и 4.

Программа для пакета DERIVE 2.2

```
>q1(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=LIM((ELEMENT(f,1)*DIF(ELEMENT(f,2),y,1)-ELEMENT(f,2)*DIF(ELEME~
NT(f,1),y,1))/(ELEMENT(f,1)^2+ELEMENT(f,2)^2),x,x1,0)
>q2(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=LIM((ELEMENT(f,1)*DIF(ELEMENT(f,2),x,1)-ELEMENT(f,2)*DIF(ELEME~
NT(f,1),x,1))/(ELEMENT(f,2)^2+ELEMENT(f,1)^2),y,y1,0)
>q3(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=LIM((ELEMENT(f,1)*DIF(ELEMENT(f,2),y,1)-ELEMENT(f,2)*DIF(ELEME~
NT(f,1),y,1))/(ELEMENT(f,1)^2+ELEMENT(f,2)^2),x,x2,0)
>q4(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=LIM((ELEMENT(f,1)*DIF(ELEMENT(f,2),x,1)-ELEMENT(f,2)*DIF(ELEME~
NT(f,1),x,1))/(ELEMENT(f,2)^2+ELEMENT(f,1)^2),y,y2,0)
>i1(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=INT(q1(f,x,y,x1,y1,x2,y2),y,y2,y1)
>i2(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=INT(q2(f,x,y,x1,y1,x2,y2),x,x1,x2)
>i3(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=INT(q3(f,x,y,x1,y1,x2,y2),y,y1,y2)
>i4(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=INT(q4(f,x,y,x1,y1,x2,y2),x,x2,x1)
>IND(f,x,y,x1,y1,x2,y2):=(i1(f,x,y,x1,y1,x2,y2)+i2(f,x,y,x1,y1,x2,y2)+i3(f,x,y,x1,y1,x~
2,y2)+i4(f,x,y,x1,y1,x2,y2))/(2*pi)
```

Программа для пакета MATHEMATICA 2.2

```
Indv[]:=Module[{i,j,k},GG[]:=Module[{j},u=NN[FF_];j:=1;While[j<n,u=Append[u,{WX[[j]],W~
a[[j]],Wb[[j]]}];j++];u=Append[u,{AccuracyGoal->Infinity,MaxRecursion->1}];u=ReplacePa~
rt[u,F,1];h:=ReplacePart[u,NIntegrate,0]];k:=1;s:=0;md=Simplify[Sum[v[[j]]^2,{j,n}]]^(~
n/2);While[k<=n,WV:=Delete[v,k];i:=1;While[i<=n,Wa:=Delete[xa,i];Wb:=Delete[xb,i];WX:=~
Delete[xx,i];FF:=((-1)^(k+i)*v[[k]]*1*Det[Table[D[WV[[q]],WX[[p]]],{q,n-1},{p,n-1}]])/~
md;wup:=FF/.xx[[i]]->xb[[i]];wdn:=FF/.xx[[i]]->xa[[i]];F:=wup-wdn;GG[];s=s+h;i++];k++]~
;N[(s*Gamma[n/2+1])/(n*Pi^(n/2))]]
```

Литература

1. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному анализу. М., 1977.
2. Родионов Е.Д., Никоноров Ю.Г. Standard homogeneous Einstein manifolds and Diophantine equations // Archivum mathematicum. 1996. V.32 (2).
3. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Введение в среду пакета MATHEMATICA 2.2. М., 1997.