УДК 519.9

Г.И. Алгазин, Ю.Г. Алгазина

Вариантный поиск решений задач нелинейного программирования

Работа имеет прежде всего методическую направленность и ставит своей целью преодоление ряда трудностей, которые могут встречаться при применении метода множителей Лагранжа в задачах нелинейного математического программирования.

Рассматривается задача нелинейного программирования

$$f(x) \longrightarrow \max_x;$$

$$g_i(x) \le b_i, \quad i = \overline{1,k}; \tag{1}$$

$$g_i(x) = b_i, \quad i = \overline{k+1,m};$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0.$$

Известно, что при определенных предположениях решения задачи (1) удовлетворяют условиям Куна–Таккера

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) \ge 0, \quad i = \overline{1,k};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1,m}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \lambda_i = 0, \quad i = \overline{1,k};$$

$$x \ge 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

Здесь $L(x,\lambda)$ – функция Лагранжа задачи (1)

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)).$$

Особенности так называемых соотношений дополняющей нежесткости $\frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \lambda_i = 0$ позволяют для решения системы равенств и неравенств (2) использовать перебор следующих возможных вариантов для оптимальных значений переменных x_j^* $(j = \overline{1,n})$ и λ_i^* $(i = \overline{1,k})$: $x_j^* = 0$ или $x_j^* > 0$; $\lambda_i^* = 0$ или $\lambda_i^* > 0$.

Полный набор вариантов для x_j^*, λ_i^* удобно представить в табличной форме

№ вар.	x_1^*	x_2^*	...	x_n^*	λ_1^*	...	λ_k^*
1	0	0	...	0	0	...	0
2	0	0	...	0	0	...	>0
:	:	:	.:.	:	:	.:.	:
2^k	0	0	...	0	>0	...	>0
2^k+1	0	0	...	>0	0	...	0
2^k+2	0	0	...	>0	0	...	>0
:	:	:	.:.	:	:	.:.	:
2^{k+n}	>0	>0	...	>0	>0	...	>0

Общее количество вариантов – 2^{k+n}.

Тогда ход решения задачи (2) состоит в следующем:

1) согласно таблице выбирается очередной вариант значений переменных x_j, λ_i;

2) система условий (2) конкретизируется для выбранного варианта значений переменных;

3) ищутся решения полученной системы условий Куна–Таккера или показывается ее противоречивость.

Так, для варианта с номером 2^k+2 условия Куна–Таккера будут выглядеть как

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=k}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0, \quad j = \overline{1,n-1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \sum_{i=k}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) \ge 0, \quad i = \overline{1,k-1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k,m};$$

$$x_j = 0, \quad j = \overline{1,n-1};$$

$$x_n > 0, \quad \lambda_k > 0.$$

Пример: решить задачу

$$-(2x_1-5)^2 - (2x_2-1)^2 \longrightarrow \max_{x_1,x_2};$$

$$2x_1 + x_2 \le 5;$$

$$x_1 + 2x_2 = 2;$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Запишем функцию Лагранжа и условия оптимальности Куна–Таккера

$$L = -(2x_1-5)^2 - (2x_2-1)^2 + \lambda_1(5 - 2x_1 - x_2) + \\ +\lambda_2(2 - x_1 - 2x_2).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4(2x_1 - 5) - 2\lambda_1 - \lambda_2 \le 0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(2x_2 - 1) - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 5 - 2x_1 - x_2 \ge 0; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 - x_1 - 2x_2 = 0; \qquad (6)$$

$$(-4(2x_1 - 5) - 2\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0; \qquad (7)$$

$$(-4(2x_2 - 1) - \lambda_1 - 2\lambda_2)x_2 = 0; \qquad (8)$$

$$(5 - 2x_1 - x_2)\lambda_1 = 0; \qquad (9)$$

$$x_1,\ x_2,\ \lambda_1 \ge 0. \qquad (10)$$

Составляем таблицу вариантов для x_1, x_2, λ_1. Удобно дополнить ее столбцом для комментариев. Если вариант недопустим, то в этом столбце будем указывать основания для такого вывода. В противном случае в столбце комментариев записывается решение условий Куна–Таккера.

№	x_1	x_2	λ_1	Комментарий
1	0	0	0	Недопустим по (6)
2	0	0	>0	Недопустим по (6)
3	0	>0	0	Недопустим по (6), (8), (1)
4	0	>0	>0	Недопустим по (6), (9)
5	>0	0	0	$x_1^*=2, x_2^*=0, \lambda_1^*=0, \lambda_2^*=4$
6	>0	0	>0	Недопустим по (6), (9)
7	>0	>0	0	Недопустим по (6)-(8), (10)
8	>0	>0	>0	Недопустим по (6), (9), (10)

Для варианта 1 условия Куна–Таккера конкретизируются следующим образом:

$$20 - \lambda_2 \le 0;$$
$$4 - 2\lambda_2 \le 0;$$
$$5 \ge 0;$$
$$2 = 0.$$

Отсюда видно, что этот вариант недопустим по условию (6). По этому же условию не проходит и вариант 2.

3-му варианту соответствуют условия

$$20 - \lambda_2 \le 0;$$
$$5 - x_2 \ge 0;$$
$$2 - 2x_2 = 0;$$
$$-4(2x_2 - 1) - 2\lambda_2 = 0;$$
$$x_2 > 0.$$

Из равенств имеем $x_2 = 1$, $\lambda_2 = -2$, но это противоречит первому неравенству.

Вариант 4 также не проходит, так как дает несовместность условий (6) и (9).

Проверяем 5-й вариант

$$4 - 2\lambda_2 \le 0;$$
$$5 - 2x_1 \ge 0;$$
$$2 - x_1 = 0;$$
$$-4(2x_1 - 5) - \lambda_2 = 0;$$
$$x_1 > 0.$$

$x_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ являются решениями этой системы равенств и неравенств.

Аналогичный разбор оставшихся вариантов не дает новых решений.

Изложенный вариантный поиск решений системы равенств и неравенств Куна–Таккера показал свою эффективность при обучении студентов экономических специальностей университетов.