УДК 514.75

М.А. Чешкова

О каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n

Рассмотрим гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n.

Теорема. *Если у гиперповерхности $M \subset E^n (n > 3)$, не являющейся гиперсферой, гауссова кривизна K не равна нулю, то следующие утверждения эквивалентны:*

1) орт одного из главных направлений торсообразующее векторное поле;

2) гиперповерхность M есть гиперповерхность вращения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n.

Обозначим $F(M)$ — R-алгебру дифференцируемых на M функций; $T^q_s(M)$ — F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s), $\chi(M)$ — алгебру Ли векторных полей на M; ∂ — дифференцирование и $<,>$ — скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n; \tag{1}$$

$$\partial_X n = -AX,$$

где $A \in T^1_1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\beta \in T^0_2(M)$, $\beta(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма A — оператор Вейнгартена, ∇ — связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = <X, Y>$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y)Z = \beta(Y,Z)AX - \beta(X,Z)AY; \tag{2}$$

$$dA(X,Y) = 0,$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны связности ∇; $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ — внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Пусть $U, X_i,\ i = 1,\dots,n-2$ — орты главных направлений, т.е. $AX_i = k_i X_i,\ AU = kU$, причем векторное поле U — торсообразующее. Тогда [2]

$$\begin{gathered}\nabla_X U = \lambda X + \omega(X)U;\\ \lambda \in F(M),\, \omega \in T^0_1(M).\end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, что если векторное поле U — торсообразующее, то и векторное поле fU, $f \in F(M)$ также торсообразующее.

Умножим (3) скалярно на U, получим $\lambda g(X,U) + \omega(X) = 0$. Откуда

$$\begin{gathered}\lambda + \omega(U) = 0,\ \omega(X_i) = 0,\\ \nabla_{X_i} U = \lambda X_i, \quad \nabla_U U = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Дифференцируя (3) и используя (2), получим

$$\begin{gathered}R(X,Y)U = (X\lambda - \lambda\omega(X))Y - (Y\lambda - \lambda\omega(Y))X +\\ + d\omega(X,Y)U = b(Y,U)AX - b(X,U)AY.\end{gathered} \tag{5}$$

Полагая $X = X_i, Y = X_j$ и $X = X_i, Y = U$ и используя (4), получим

$$X_i\lambda = 0; \tag{6}$$

$$d\omega(X_i, X_j) = 0; \tag{7}$$

$$d\omega(X_i, U) = 0; \tag{8}$$

$$U\lambda - \lambda\omega(U) = k_i k. \tag{9}$$

Из (9) следует, что, если $K \neq 0$ и гиперповерхность M не есть гиперсфера, то оператор A имеет собственное значение $\bar{k} = k_i$ кратности $n-2$. Кроме того, следует, что векторное поле U не может быть рекурентным, т.е. $\lambda \neq 0$, в противном случае $K = 0$. Поле U не может быть специальным конкурентным полем, т.е. $\omega \neq 0$, так как $\omega = 0$ влечет $\lambda = 0$.

Таким образом, гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер радиуса $\frac{1}{|\bar{k}|}$, т.е. каналовая, центры которых имеют вид:

$$\mathrm{C} = r + \frac{1}{\bar{k}}n, \tag{10}$$

где r — радиус-вектор точки гиперповерхности M.

Имеем

$$k\bar{k} = U\lambda + \lambda^2; \tag{11}$$

$$AX_i = \bar{k}X_i,\ AU = kU. \tag{12}$$

Определено $(n-2)$-распределение

$$\Delta(p) = \{X \in T_pM : AX = \bar{k}X\},$$

которое определяется уравнением $\omega(X) = 0$ и которое в силу (7) инволютивное.

Из $dA(X,Y) = 0,\ X, Y \in \Delta$ следует

$$X\bar{k} = 0,\ X \in \Delta. \tag{13}$$

Покажем, что каналовая гиперповерхность M является гиперповерхностью вращения.

Из (8), (4), (6) имеем

$$d\omega(X_i, U) = X_i\omega(U) - U\omega(X_i) - \omega([X_i, U]) = \\ = -\omega(\nabla_{X_i}U - \nabla_U X_i) = g(\nabla_U X_i, U) = 0.$$

Таким образом,

$$\nabla_U X_i \in \Delta. \tag{14}$$

Дифференцируем (11) вдоль X_i, используем (6), (13)

$$\bar{k}X_i k = X_i U\lambda = UX_i\lambda + [X_i, U]\lambda = \\ = [X_i, U]\lambda = (\nabla_{X_i}U)\lambda - (\nabla_U X_i)\lambda = 0.$$

Откуда в силу (4), (6), (13), (14) получим

$$Xk = 0, \ X \in \Delta. \tag{15}$$

Кроме того, из равенства $dA(X_i, U) = 0$ вытекает

$$U\bar{k} = (k - \bar{k})\lambda. \tag{16}$$

Рассмотрим линию центров. Дифференцируем вдоль U

$$\partial_U C = U + U\left(\frac{1}{\bar{k}}\right)n - \frac{k}{\bar{k}}U = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k}^2}t,$$

где $t = \bar{k}U + \lambda n$. Дифференцируем t вдоль U, используя (1), (4), (11), (16), получим

$$\partial_U t = (U\bar{k})U + \bar{k}kn + (U\lambda)n - \lambda kU = -\lambda t.$$

Это означает, что линия центров прямая, а каналовая гиперповерхность есть гиперповерхность вращения.

Обратно, пусть M — гиперповерхность вращения, т.е. огибающая однопараметрического семейства гиперсфер радиуса $\dfrac{1}{|\bar{k}|}$, причем линия центров гиперсфер есть прямая. Тогда оператор A имеет вид

$$AX = \bar{k}X + \epsilon(X)U, \tag{17}$$

где $\epsilon\Lambda\omega = 0$; $Xk = 0$; $X\bar{k} = 0$, $X \in \Delta$; U — орт распределения $\Delta^\perp(p) = \{X \in T_pM : AX = kX\}$.

Покажем, что векторное поле U — торсообразующее. Из равенства $dA(X, U) = 0$, $X \in \Delta$ получим

$$(X\bar{k})U + \bar{k}\nabla_X U - (Uk)X - k(\nabla_U X) - \\ - A(\nabla_X U - \nabla_U X) = 0.$$

Так как $\forall Z \in \Xi(M)$, имеем $Z = Z^\top + g(Z, U)U$, $Z^\top \in \Delta$, получим

$$(Xk)U + (k - \bar{k})(\nabla_X U)^\top - (Uk)X + \\ + (k - \bar{k})(\nabla_U X)^\perp = 0.$$

Используя равенства $g(\nabla_Z U, U) = 0$, $Xk = 0$, получим

$$(\nabla_U X)^\perp = 0, \ \nabla_X U = \frac{U\bar{k}}{k - \bar{k}}X. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство $g(X, U) = 0$, $X \in \Delta$, получим

$$\nabla_U U = 0. \tag{19}$$

Таким образом,

$$\nabla_Z U = \nabla_{Z^\top + g(Z,U)U}U = \frac{Uk}{\bar{k} - k}Z^\top = \lambda Z + \omega(Z)U,$$

где

$$\lambda = \frac{Uk}{\bar{k} - k}, \ \omega(Z) = \frac{Uk}{k - \bar{k}}g(Z, U).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., 1981.
2. Schouten I.A. Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1954.