УДК 519.48

Ю.Н. Мальцев

Замечание о ниль полугруппах полупервичных колец

В работе $[1, p.125-130]$ доказано, что первичное кольцо, удовлетворяющее обобщенному полиномиальному тождеству над центроидом, не содержит ненулевых ниль односторонних идеалов. Цель настоящей заметки – доказать следующую теорему, из которой, в частности, будет следовать вышеприведенный результат.

Теорема. Пусть R – полупервичное кольцо и J – ненулевая ниль подполугруппа в $\langle R, \cdot\rangle$, являющаяся правым идеалом в полугруппе $\langle R, \cdot\rangle$. Тогда J содержит такое счетное подмножество элементов $\{a_1, a_2, \dots\}$, что

1) для любого целого числа $n \geq 1$ $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \neq 0$;

2) $a_i a_j = 0$, если $i \leq j$.

Доказательство. Выберем в полугруппе J такой ненулевой элемент a, что $a^2 = 0$. Ввиду полупервичности кольца R существует элемент $x \in R$ такой, что $axa \neq 0$. Так как J – правый идеал в $\langle R, \cdot\rangle$, то $ax \in J$ и существует такое целое число $k \geq 2$, что $(ax)^k a = 0$ и $(ax)^{k-1} a \neq 0$. Пусть $s = x(ax)^{k-2}$. Тогда $asa \neq 0$ и $(as)^2 a = asasa = (ax)(ax)^{k-2} \cdot (ax)(ax)^{k-2} \cdot a = (ax)^{2k-2} \cdot a = 0$, так как $2k-2 \geq k$. Элемент $asa \in J$. Рассуждая аналогично, мы можем найти такой элемент $y \in R$, что $(asa)y(asa) \neq 0$ и $[(asa)y]^2 \cdot a = 0$. Положим $(asa)y(as) = a_1$. Тогда $a_1 \cdot a \neq 0$, $aa_1 = a_1^2 = (asa)y(as)(asa)y(as) = (asa)y(as)^2 ay(as) = 0$ и элемент $a_1 \in J$. Рассмотрим элемент $c = a_1 a \in J$. Тогда $c^2 = a_1(aa_1)a = 0$. Рассуждая аналогично, мы найдем такой элемент $a_2 = c\mu c\nu c\mu \in J$, что $a_2 \cdot c = a_2 a_1 a \neq 0$ и $a_2^2 = ca_2 = a_1 a a_2 = 0$, $aa_2 = 0$, $a_1 a_2 = (a_1 c)\mu c\nu c\mu = a_1^2 a\mu c\nu c\mu = 0$. Предположим, что в J существуют такие элементы $\{a_1, \dots, a_n\}$, что $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a \neq 0$ и $a_i a_j = 0$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Построим такой элемент $a_{n+1} \in J$, что $a_{n+1} a_n \dots a_2 a_1 a \neq 0$ и $a_i a_{n+1} = 0$, $i \leq n+1$. Пусть $u = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a$. Тогда $u^2 = 0$ и существует элемент вида $a_{n+1} = u \cdot \lambda \cdot u \cdot \gamma u \cdot \lambda \in J$ такой, что $a_{n+1} \cdot u \neq 0$, $a_{n+1}^2 = (u\lambda u)\gamma(u\lambda u\lambda u)\gamma u\lambda = 0$. Рассмотрим произведение $a_i a_{n+1}$, где $i \leq n$. Имеем, что $a_i \cdot a_{n+1} = a_i \cdot u \cdot \lambda u\gamma u\lambda = (a_i \cdot a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a)\lambda u\gamma u\lambda = 0$, так как $a_i \cdot a_n = 0$, $i \leq n$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть R – полупервичное кольцо и J – ниль подполугруппа, являющаяся правым идеалом в $\langle R, \cdot\rangle$. Тогда J не содержится в подкольце R, удовлетворяющем тождественному соотношению.

Действительно, рассуждая от противного, мы можем считать, что J содержится в подкольце кольца R, удовлетворяющем полилинейному тождеству вида

$$x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 + \sum_{(i)} \alpha_{(i)} x_{i_1} \dots x_{i_n} = 0,$$

где суммирование берется по всем перестановкам $(i) \neq (n, n-1, \dots, 2, 1)$. Согласно теореме, в J существует такое бесконечное подмножество $\{a_1, a_2 \dots\}$, что $a_i a_j = 0$, $i \leq j$ и $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 \neq 0$. Подставляя вместо $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$, имеем противоречие.

Следствие 2 [1]. Пусть R – первичное кольцо, удовлетворяющее обобщенному полиномиальному тождеству над центроидом. Тогда R не содержит ненулевых правых ниль идеалов.

Действительно, если K – ненулевой правый ниль идеал, то согласно теореме 3.1. работы [1]K содержит ненулевой правый PI – идеал J. Это противоречит следствию 1.

Литература

1. Jain S.K. Prime rings having one-sided ideal with polynomial identity coincide with special Johnson rings // Journ. Algebra. 1971. V. 19.