УДК 517.946

А.А. Папин, Н.С. Первова

Автомодельное решение уравнений двухфазной среды (модель Х.А. Рахматулина)

Введение. Рассматривается одномерное изотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с общим давлением (гипотеза Х.А. Рахматулина) и в отсутствие фазовых переходов. Уравнения модели имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i v_i) = 0; \tag{1}$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \, s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -s_i \frac{\partial p}{\partial x} + K \varphi_i; \tag{2}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \rho_i = s_i \rho_i^o, \quad i = 1,2, \quad \varphi_1 = v_2 - v_1, \quad \varphi_2 = v_1 - v_2. \tag{3}$$

Здесь ρ_i, v_i, s_i, p – соответственно приведенные плотности, скорости, объемные концентрации и давление являются искомыми функциями переменных x, t. Истинные плотности ρ_i^o, коэффициенты вязкости μ_i и коэффициент взаимодействия фаз K — заданные положительные постоянные.

Для системы (1)-(3) рассматривается автомодельное решение типа "бегущей волны". Предполагая все искомые функции зависящими только от переменной $\xi = x - ct$ (c — постоянный параметр), приходим к следующей системе уравнений

$$(\rho_i v_i - c\rho_i)' = 0, \quad i = 1,2; \tag{4}$$

$$\rho_i (v_i v_i' - c v_i') - (\mu_i s_i v_i')' = -s_i p' + K\varphi_i, \tag{5}$$

где штрих означает дифференцирование по ξ. Система (3)-(5) рассматривается при $\xi > 0$ и дополняется граничными условиями

$$v_i(0) = v_i^0, \quad \lim_{\xi \to \infty} v_i(\xi) = u^+, \quad i = 1,2; \tag{6}$$

$$s_1(0) = s^0, \quad \lim_{\xi \to \infty} s_1(\xi) = s^+, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

где v_1^0, v_2^0,s^0,s^+ – заданные постоянные, удовлетворяющие условиям: $s^0 \neq s^+$, $v_1^0 \neq v_2^0$.

Поскольку из (4) следует

$$s_i(v_i - c) = A_i, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

то привлекая (6), (7) и (8), приходим к следующей системе уравнений для неизвестных постоянных A_1, A_2, u^+, c:

$$s^0(v_1^o - c) = A_1, \quad s^+(u^+ - c) = A_1;$$

$$(1 - s^0)(v_2^o - c) = A_2, \quad (1 - s^+)(u^+ - c) = A_2.$$

Решение последней дается формулами

$$c = \frac{s^+(1 - s^0)v_2^o - s^0(1 - s^+)v_1^o}{s^+ - s^0};$$

$$A_1 = s^0(1 - s^0)(v_1^o - v_2^o)\frac{s^+}{s^+ - s^0};$$

$$A_2 = \frac{s^+}{s^+ - s^0} A_1, \quad u^+ = s^0 v_1^o + (1 - s^0) v_2^o.$$

Рассматривая (5),(8) как систему относительно $p'(\xi)$ и $s(\xi) \equiv s_1(\xi)$, получаем (складывая уравнения (5) при $i = 1$ и $i = 2$) уравнение для $p(\xi)$:

$$p'(\xi) = \sum_{i=1}^{2} (v_i \rho_i (c - v_i) + \mu_i s_i v_i')' \tag{9}$$

и (исключая из (5) p' и v_i) уравнение для $s(\xi)$:

$$a_1(s)s'' + \frac{1}{2}(s')^2 \frac{da_1}{ds} + \lambda a_2(s) s' -$$

$$-K a_3(s)(s - s^+) = 0, \tag{10}$$

где

$$a_1(s) = \frac{\mu_1 s^+}{s^2} + \frac{\mu_2(1 - s^+)}{(1 - s)^2};$$

$$a_2(s) = \frac{\rho_1^0 (s^+)^2}{s^3} + \frac{\rho_2^0 (1 - s^+)^2}{(1 - s)^3};$$

$$a_3(s) = \frac{1}{s^2(1 - s)^2}; \qquad \lambda = \frac{s^0(1 - s^0)(v_1^0 - v_2^0)}{s^0 - s^+}.$$

Пусть $s(\xi)$ – решение задачи (7),(10). Тогда из (9) определяется давление $p(\xi)$, а из (8)– скорости v_i. Таким образом, задача (3)-(7) эквивалентна задаче (7),(10).

Цель работы состоит в доказательстве существования единственного решения поставленной задачи.

Разрешимость задачи. В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия на данные задачи (3)-(7):

$$\lambda > 0, \qquad s^+ \neq s^0 \qquad (s^+, s^0) \in (0,1). \tag{11}$$

Доказательство существования решения проводится на основе теоремы Шаудера [2] и использует стандартные вспомогательные построения. Обозначив $a^2(s) = a_1(s)$, уравнение (10) представим в дивергентной форме

$$(as')' + \lambda \frac{a_2}{a} s' - K\frac{a_3}{a}(s - s^+) = 0. \tag{12}$$

Полагая $u(s(\xi)) = \int_{s^+}^{s(\xi)} a(\tau)d\tau$, приходим к эквивалентной (7), (12) задаче

$$u'' + \lambda b(u)u' - Kd(u)u = 0;$$

$$u(0) = \int_{s^+}^{s^0} a(\tau)d\tau \equiv u_0, \quad u(\infty) = 0, \tag{13}$$

где

$$b(u) = \frac{a_2(s(u))}{a_1(s(u))}, \quad d(u) = \frac{a_3(s(u))}{a(s(u))}\frac{(s(u) - s^+)}{u}.$$

Постоянные K и λ положительны по условию задачи; функции $d(s)$, $a(s)$ и $a_3(s)$ положительны для всех $s \in (0,1)$. В дальнейшем считаем $s^+ < s^0$ (случай $s^+ > s^0$ рассматривается аналогично).

На отрезке $[0,n]$ рассмотрим вспомогательную задачу для $v(\xi) = \int_{s^+}^{s(\xi)} a(\tau)d\tau$:

$$\begin{aligned} &v'' + \lambda b(v)v' - Kd(v)v = 0;\\ &v(0) = u_0, \quad v(n) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Решения последней в силу принципа максимума удовлетворяют неравенствам $u_0 \geq v(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in [0,n]$. Поэтому функции $b(v)$ и $d(v)$ являются строго положительными и ограниченными. Положим

$$a_0(\tau) = \sqrt{\mu_1 s^+(1-\tau)^2 + \mu_2(1-s^+)\tau^2},$$

$$b_0(\tau) = (\rho_1^0(s^+)^2(1-\tau)^3 + \rho_2^0(1-s^+)^2\tau^3)/a_0^2.$$

Тогда

$$a(\tau) = \frac{a_0(\tau)}{\tau(1-\tau)}, \qquad b(\tau) = \frac{b_0(\tau)}{\tau(1-\tau)};$$

$$\tau d(\tau) = \frac{\tau - s^+}{a_0(\tau)\tau(1-\tau)}.$$

Пусть α_1, α_2 –минимальные значения функций $a_0(\tau)$, $b_0(\tau)$, а β_1,β_2 – соответственно их максимальные значения при $s \in [0,1]$ (ясно, что α_i, β_i строго положительны и зависят только от μ_i, ρ_i, $s^+; i = 1,2$). Тогда, положив $\alpha_3 = min(\alpha_1, \alpha_2, 1/\beta_1)$, $\beta_3 = max(\beta_1, \beta_2, 1/\alpha_1)$, получим

$$\alpha = \frac{\alpha_3}{s^0(1-s^+)} \leq \frac{\alpha_3}{s(v)(1-s(v))} \leq (\frac{vd(v)}{s(v)-s^+}, a(v), b(v)) \leq \frac{\beta_3}{s(v)(1-s(v))} \leq \frac{\beta_3}{s^+(1-s^0)} = \beta. \tag{15}$$

Производная решения задачи (14) в точке $\xi = n$ неположительна, поскольку предположение $v'(n) > 0$, ввиду граничного условия $v(n) = 0$, приводит к противоречию с неотрицательностью $v(\xi)$. Представив уравнение (14) в виде

$$\phi' = Kvd(v) \geq 0, \quad \phi = v' + \lambda \int_0^v b(\tau)d\tau, \tag{16}$$

выводим, что монотонно возрастающая функция $\phi(\xi)$ является неположительной. Поэтому $v'(\xi) \leq 0$ и $v''(\xi) \geq 0$ в силу (14) для всех $\xi \in [0,n]$. Из (16) и (15) следует $v' + \lambda\beta v \leq 0$. Поэтому

$$v(\xi) \leq u_0 \exp(-\lambda\beta\xi); \tag{17}$$

$$|v'(\xi)| \geq \lambda\beta u_0 \exp(-\lambda\beta\xi).$$

Уравнение (14) разрешим относительно первой производной

$$v'(\xi) = v'(0)\exp(-\lambda\varphi(v(\xi))) + D(v(\xi)), \tag{18}$$

где

$$\varphi(v(\xi)) = \int_0^\xi b(v(y))dy;$$

$$D(v(\xi)) = K\int_0^\xi (v(y)d(v(y))\exp(-\lambda(\varphi(\xi) - \varphi(y)))dy.$$

Из (15) следует $\alpha\xi \leq \varphi(\xi) \leq \beta\xi$, а из определения $v(\xi)$ с учетом (15) имеем $v(\xi)/\beta \leq s(\xi) - s^+ \leq v(\xi)/\alpha$. Используя эти неравенства, получаем последовательно:

$$D(\xi) \leq \frac{K\beta u_0}{\alpha^2\lambda}, \quad B(n) \equiv \int_0^n D(\xi)d\xi \leq \frac{Ku_0}{\alpha^2\lambda^2} < \infty.$$

Проинтегрировав (18) по ξ от 0 до n, найдем зна-

чение первой производной в точке $\xi = 0$

$$-v'(0) = \frac{u_0 + B(n)}{\int_0^n \exp(-\lambda\varphi(\xi))d\xi}. \qquad (19)$$

Эта величина конечна для всех $n > 0$,так как

$$|v'(0)| \leq \frac{u_0\beta(\alpha^2\lambda^2 + K)}{\alpha^2\lambda(1 - \exp(-\lambda\beta n))} \equiv N.$$

С помощью (19) и (18) оценим $v'(\xi)$ снизу, а из (14) оценим $v''(\xi)$ сверху. Тогда дополнительно к (17) получим

$$|v'(\xi)| \leq N\exp(-\lambda\alpha\xi), \qquad (20)$$

$$|v''(\xi)| \leq \lambda\beta N\exp(-\lambda\alpha\xi) + Ku_0\frac{\beta}{\alpha}\exp(-\lambda\beta\xi).$$

Представим решение задачи (14) в виде

$$v(\xi) = u_0 + m(v)\int_0^\xi e^{(-\lambda\varphi(v(y)))}dy + B(v) \equiv T(v), \qquad (21)$$

где функционал $m(v) = v'(0)$ определен в (19). В пространстве непрерывных функций $C[0,n]$ рассмотрим замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $M = \{v(\xi)| \quad 0 \leq v(\xi) \leq u_0, \quad \xi \in [0,n]\}$. Оператор T определен на множестве M, и в силу принципа максимума имеет место вложение $T(M) \subset M$. Непрерывность T проверяется непосредственно с помощью представления (21). Из оценок (17),(20) следует, что T является вполне непрерывным. Следовательно, по теореме Шаудера на множестве M задача (14) имеет по крайней мере одно решение. Это решение единственно, если $(vd(v))'_v > 0$. Действительно, пусть $f(\xi)$ – достаточно гладкая функция, определенная на интервале [0,n] и равная нулю при $\xi = 0$ и $\xi = n$. Умножим обе части уравнения (14) на $f(\xi)$ и проинтегрируем полученное равенство по ξ от нуля до n, сбрасывая производные с $v(\xi)$ на $f(\xi)$. В результате приходим к следующему интегральному равенству:

$$\int_0^n (vf'' - \lambda f'\int_0^v b(\tau)d\tau - Kfvd(v))d\xi =$$

$$= v(0)f'(0). \qquad (22)$$

Пусть v_1, v_2 – два различных решения задачи (14). Для их разности $w = v_1 - v_2$ справедливо вытекающее из (22) равенство

$$\int_0^n w(f'' - \lambda D_1(\xi)f' - KD_2(\xi)f)d\xi = 0, \qquad (23)$$

где $D_2(\xi) = (v_1d(v_1) - v_2d(v_2))/w > 0$, $D_1(\xi) = 1/w\int_{v_1}^{v_2} b(\tau)d\tau$. Определим $f(\xi)$ как решение следующей линейной задачи:

$$f'' - \lambda D_1(\xi)f' - KD_2(\xi)f = h(\xi), \quad f(0) = f(n) = 0,$$

где $h(\xi)$ – произвольная непрерывная функция. Известно [2], что данная задача разрешима при любой непрерывной правой части. Поэтому из (23) следует $w = 0$.

Решение задачи (7),(10) на бесконечном интервале получим как предел последовательности $\{v_n(\xi)\}$ решений $v_n(\xi)$ задачи (14) при $n \to \infty$, используя независящие от n оценки (17),(20). В силу единственности решений задач (14) ограниченная последовательность $\{v_n(\xi)\}$ монотонно возрастает и, следовательно, сходится к некоторой функции $u(\xi)$. Осуществляя предельные переходы в равенствах (21), записанных для $v_n(\xi)$, получим аналогичное равенство для предельной функции. Последнее означает, что $u(\xi)$ является классическим решением задачи (7),(10). Асимптотическое поведение решения определяется неравенствами (17),(20).

Сформулируем достаточные условия единственности решения задачи (14) в терминах начальных данных задачи (7),(10). Условие $(vd(v))' > 0$ эквивалентно следующему: $r(s)/s^5(1-s)^5a^3(s) > 0$. Знаменатель данной дроби всегда положителен для $s \in (0,1)$, а числитель имеет вид

$$r(s) = \mu_1 s^+(1-s)^2 g(s;s^+) +$$
$$+\mu_2(1-s^+)s^2 g(1-s;1-s^+),$$

где $g(\tau;\eta) = 2\tau^2 - 3\eta\tau + \eta = 2\tau(\tau-\eta) + \eta(1-\tau)$. Отметим, что $g(\tau;\eta) > 0$ при $\eta < 8/9$, $\tau \in (0,1)$.

Пусть $s^0 > s^+$. Тогда $s^0 \geq s(\xi) \geq s^+$ и $g(s;s^+) > 0$. Для положительности $g(1-s;1-s^+)$ достаточно потребовать выполнения условия $1 - s^+ < 8/9$, т.е. $s^+ > 1/9$. Тогда $r(s) > 0$. Аналогично при $s^0 < s^+$ имеем $s^0 \leq s(\xi) \leq s^+$ и $g(1-s;1-s^+) > 0$. Для положительности $g(s;s^+)$ достаточно потребовать $s^+ < 8/9$ и получить $r(s) > 0$. Если $s^+ \leq 1/9$ (или $s^+ \geq 8/9$), то условие $r(s) > 0$ может нарушаться (это легко увидеть, если рассмотреть предельное значение $r(s)$ при $s^+ \to +0$ или $s^+ \to 1-0$). Поэтому для любых μ_1, μ_2 при $s^0 > s^+$ и $s \in (0,1)$ можно указать значения $s^+ \in (0, s^+_*)$, $s^+_* < 1/9$, при которых $r(s) \leq 0$. Аналогично при $s^0 < s^+$ существуют значения $s^+ \in (s_*, 1)$, $s_* > 8/9$ такие, что $r(s) \leq 0$ для любых μ_1, μ_2 и $s \in (0,1)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Существует единственное классическое решение $s(\xi)$ задачи (7),(10), если дополнительно к условиям (11) значения s^+ таковы, что функция $r(s)$ из (24) положительна.

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., 1987.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.