УДК 514.765

Е.Д. Родионов, В.В. Славский[1]

Оценки кривизн левоинвариантных римановых метрик трехмерных компактных простых групп Ли

В работе даются оценки секционной кривизны и кривизны Риччи на компактных трехмерных простых группах Ли. При доказательстве основных теорем существенно используются формула для вычисления секционной кривизны группы Ли с левоинвариантной метрикой, полученная Дж. Милнором [1, с. 293–329], а также формула для нахождения секционной кривизны однородного риманового многообразия $Spin(3)$, полученная Ф.М. Валиевым [2].

Пусть G — компактная простая трехмерная группа Ли, g — ее алгебра Ли, со стандартным базисом E_1, E_2, E_3 таким, что

$$[E_1, E_2] = E_3,\ [E_2, E_3] = E_1,\ [E_3, E_1] = E_2. \quad (1)$$

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_0$ стандартное скалярное произведение на g, определяемое с помощью формы Киллинга, а через $(\cdot,\cdot)$ — произвольное скалярное произведение на g. Такими же символами обозначим соответствующие левоинвариантные римановы метрики на G. Тогда, по спектральной теореме, существует базис Z_1, Z_2, Z_3 такой, что

$$\begin{gathered}(Z_i, Z_j)_0 = \delta_{ij}, (Z_i, Z_i) = \lambda_i > 0;\\ (Z_i, Z_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\\ [Z_1, Z_2] = Z_3,\ [Z_2, Z_3] = Z_1,\ [Z_3, Z_1] = Z_2.\end{gathered} \quad (2)$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем считать, что $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$. Таким образом, метрике $(\cdot,\cdot)$ сопоставляется набор ее характеристических чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Рассмотрим грассманово многообразие G_2 двумерных касательных плоскостей к g в точке $e \in G$. Пусть плоскость $\pi \in G_2$ и $\{X, Y\}$ – ортонормированный базис π, т.е.

$$\begin{gathered}X = \sum x_k Z_k, \quad Y = \sum y_k Z_k;\\ \sum \lambda_k x_k^2 = \sum \lambda_k y_k^2 = 1, \quad \sum \lambda_k y_k x_k = 0.\end{gathered} \quad (3)$$

Тогда секционная кривизна риманового многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$ может быть найдена по формуле [2]:

$$\begin{gathered}K(\pi) = (4\sigma_3)^{-1}\left(3L + 4M\sum M_k\alpha_k\right),\\ \text{где} \quad \sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;\ \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1;\ \sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3;\\ L = -\sigma_1^2 + 4\sigma_2;\ M_k = 2\lambda_k^2 - \lambda_k\sigma_1;\ \alpha_k = \lambda_k(x_k^2 + y_k^2), \quad k = 1, 2, 3,\\ \text{причем} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Delta = \left\{\alpha \in R^3 : \sum \alpha_k = 2,\ 0 \le \alpha_k \le 1,\ k = 1, 2, 3\right\}.\end{gathered} \quad (4)$$

Так как функция секционной кривизны $K_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \to R$ линейна относительно $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то ее экстремумы достигаются в вершинах треугольника Δ. Пусть $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(0,1,1)$ — вершины Δ, тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned}K^A(\pi) &= -(4\sigma_3)^{-1}(L + 4M_3) = (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda_1\right);\\ K^B(\pi) &= -(4\sigma_3)^{-1}(L + 4M_1) = (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\lambda_1^2 - 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_3\lambda_1\right);\\ K^C(\pi) &= -(4\sigma_3)^{-1}(L + 4M_2) = (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 3\lambda_2^2 - 2\lambda_3\lambda_1 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2\right).\end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что так как по предположению характеристические числа упорядочены $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$, то $K^B(\pi) > 0$. Далее, поделим каждое из характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3 метрики $(\cdot,\cdot)$ на характеристическое число λ_1 и предположим для краткости $t = \lambda_2/\lambda_1$, $s = \lambda_3/\lambda_1$. Имеем

$$\begin{aligned}K^A(\pi) &= l \cdot (1 + t^2 - 3s^2 - 2t + 2s + 2ts);\\ K^B(\pi) &= l \cdot (t^2 + s^2 - 3 - 2ts + 2s + 2t);\\ K^C(\pi) &= l \cdot (1 + s^2 - 3t^2 - 2s + 2t + 2ts)\end{aligned} \quad (6)$$

— формулы (5) после подстановки и преобразований. Где $l = \left(4\lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_3\right)^{-1}$, $1 \le t \le s$. Рассмот-

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00436, 96-15-96291), грантового центра при Санкт-Петербургском государственном университете (код проекта 97-0-1.3-63).

рим два случая:

$$\begin{aligned} &(a) \quad 1 \le t \le s \le t+1; \\ &(b) \quad 1 \le t < t+1 \le s. \end{aligned}$$

Каждый случай разберем по отдельности. Случаю (a) сопоставим лемму 1.

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$K^A(\pi) \le K^C(\pi) \le K^B(\pi).$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\begin{gathered} K^B(\pi) - K^C(\pi) = \\ = l \cdot (t^2 + s^2 - 3 - 2ts + 2s + 2t - \\ -1 - s^2 + 3t^2 + 2s - 2t - 2ts) = \\ = 4l(t^2 - 1 - ts + s) = 4l(t-1)(t+1-s) \ge 0. \end{gathered}$$

Аналогично имеем

$$\begin{gathered} K^C(\pi) - K^A(\pi) = \\ = l \cdot (1 + s^2 - 3t^2 - 2s + 2t + 2ts - \\ -1 - t^2 + 3s^2 + 2t - 2s - 2ts) = \\ = 4l(s^2 - t^2 + t - s) = 4l(s-t)(t+s+1) \ge 0. \end{gathered}$$

В случае (b), как и в случае (a), имеет место

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$K^A(\pi) < K^B(\pi) \le K^C(\pi).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} K^C(\pi) - K^B(\pi) &= 4l(t-1)(s-t-1) \ge 0; \\ K^B(\pi) - K^A(\pi) &= 4l(s-1)(s+1-t) > 0. \end{aligned}$$

Из лемм 1, 2 вытекает основное утверждение работы, оценка на секционные кривизны левоинвариантной метрики.

Теорема 1. *Пусть $K_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_2 \to R$ – секционная кривизна риманового многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} &a) \quad (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda_1\right) \le K_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le \\ &\le (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\lambda_1^2 - 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2\right), \quad \text{где } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_1 + \lambda_2 \\ &b) \quad (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda_1\right) < K_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le \\ &\le (4\sigma_3)^{-1}\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 3\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3\right), \quad \text{где } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 \le \lambda_3. \end{aligned}$$

Доказательство состоит в подстановке вместо t и s их выражений через λ_1, λ_2, λ_3 в соответствующие формулы.

Используя обозначения [1], можно выписать главные значения квадратичной формы Риччи, соответствующие направлениям Z_i, $i = 1,2,3$ в виде $r_1 = 2\mu_2\mu_3$, $r_2 = 2\mu_3\mu_1$, $r_3 = 2\mu_1\mu_2$. Соответственно скалярная кривизна будет равна $\rho = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2)$. Здесь

$$\mu_i = \frac{\sigma_1 - 2\lambda_i}{2\sqrt{\sigma_3}}, \quad i = 1,2,3.$$

Теорема 2. *Пусть $r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_1 \to R$ – кривизна Риччи риманового многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} &a) \quad r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad \text{где } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le (\lambda_1 + \lambda_2); \\ &b) \quad r_2 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad \text{где } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 \le \lambda_3. \end{aligned}$$

Доказательство состоит в подстановке вместо μ_1, μ_2, μ_3 их выражений через λ_1, λ_2, λ_3 в соответствующие формулы.

Замечание. Остановимся более подробно на случае, когда $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, t, s)$. Тогда в случае (a) полагая $s = t+1$, мы видим, что $K^A(\pi) < 0$. В случае (b) полагая $t = const$, $s \to \infty$, получаем, что $K^A(\pi) \to -\infty$. Таким образом, мы видим, что существуют целые классы левоинвариантных римановых метрик на трехмерных компактных простых группах Ли, секционная кривизна которых осциллирует, т. е. принимает значения разных знаков.

Литература

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv.in math. 21. 1976.
2. Валиев Ф.М. Формула секционной кривизны левоинвариантной римановой метрики на $Spin(3)$: Препринт ИМ СО РАН. Новосибирск, 1977.