УДК 537.84

А.М. Сагалаков, А.Ю.Юдинцев

Общие свойства вторичных несимметричных режимов в параллельных МГД-течениях

Рассматриваются общие свойства турбулентных статистически стационарных МГД-течений в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля. Доказываются теоремы сравнения турбулентного и ламинарного режимов течений. Описываются вторичные несимметричные режимы. При установлении таких режимов в МГД-течениях может возникнуть слабое вращение на общем фоне пульсаций и генерируется стационарное азимутальное магнитное поле.

При исследовании вторичных трехмерных автоколебательных режимов [1; 2] была установлена возможность существования вторичных режимов со спонтанной закруткой. Вероятно, подобные режимы могут существовать и в более сложных вторичных режимах, возможно, и в турбулентных течениях. Поэтому представляет интерес анализ произвольных трехмерных вторичных режимов.

Рассмотрим турбулентное статистически стационарное МГД-течение несжимаемой вязкой проводящей жидкости в прямой трубе кольцевого поперечного сечения под действием градиента давления и продольного внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси канала. Радиусы цилиндров – a и b $(a < b)$. Стенки канала будем считать идеально проводящими. В качестве масштаба длины при обезразмеривании выберем ширину кольцевого зазора $(b - a)$, масштаба скорости – среднерасходную скорость, масштаба поля – величину внешнего магнитного поля.

Уравнения, описывающие МГД-течение, в обезразмеренной форме имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\nabla p+\mathrm{e}_z P+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V}+ \\ +\frac{Ha^2}{\mathrm{Re}\,Rm}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{B}-(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V}=\frac{1}{Rm}\Delta\mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla\mathbf{V}=0,\ \nabla\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{V}(\tilde{a},\varphi,z,t)=\mathbf{V}(\tilde{b},\varphi,z,t)=0, \quad (3)$$

$$\left(\tilde{a}=\frac{a}{b-a},\tilde{b}=\frac{b}{b-a}\right).$$

Здесь $\mathrm{Re}=U_0(b-a)/\nu$ – число Рейнольдса; $Rm=\frac{4\pi\sigma}{c^2}U_0(b-a)$ – магнитное число Рейнольдса; $Ha=B_0(b-a)\sqrt{\sigma/(\rho\nu c^2)}$ – число Гартмана; ν – вязкость; σ – проводимость; ρ – плотность жидкости; U_0, B_0 – характерные масштабы скорости и напряженности магнитного поля; c – электромагнитная постоянная. В качестве граничных условий выберем для скорости условия прилипания, а для магнитного поля – условия идеальной проводимости стенок [1; 2]:

$$V_r=V_\varphi=V_z=0,\ B_r=(rB\varphi)'=(B_z)'=0 \\ \text{при } r=\tilde{a},\tilde{b}. \quad (4)$$

Определим среднее по цилиндру

$$\overline{f(r,t)}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi,z,t)\right\}dz$$

и полное среднее

$$\rangle\bar{f}\langle\equiv\rangle f\langle=\frac{2}{\tilde{b}^2-\tilde{a}^2}\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\bar{f}r\,dr\ .$$

Разложим движение на среднюю и пульсационную части:

$$[V_r,V_\varphi,V_z,B_r,B_\varphi,B_z,p]= \\ =[\bar{V}_r+u,\bar{V}_\varphi+v,\bar{V}_z+w,\bar{B}_r+ \\ +f,\bar{B}_\varphi+g,B_0+\bar{B}_z+h,\bar{p}+p.] \quad (5)$$

Средние значения пульсаций по определению равны нулю. Будем называть статистически стационарными такие турбулентные течения, для которых средние по цилиндру величины не зависят от времени. Следует также отметить, что движения, названные статистически стационарными, не обязательно являются турбулентными, например, установившиеся ламинарные течения также удовлетворяют определению статистической стационарности.

Интересным свойством вторичных течений является возможность существования несимметричных осредненных профилей скорости и магнитного поля. Из уравнения неразрывности и условий прилипания на стенках канала для скорости и условий идеальной проводимости стенок канала следует

$$\bar{V}_r\equiv 0,\ \bar{B}_r\equiv 0.$$

После осреднения по цилиндру системы МГД-уравнений (1) легко получить систему уравнений, определяющую продольные и азимутальные компоненты осредненной скорости и магнитного поля:

$$-\frac{\overline{V_\varphi}^2}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u^2}\right)-\frac{\overline{v^2}}{r}+\frac{\partial \overline{P}}{\partial r}= =\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{f^2}\right)-\frac{\overline{g^2}}{r}-\frac{\overline{B_\varphi^2}}{r}\right]; \qquad (6)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{uv}\right)+\frac{\overline{uv}}{r}=\frac{1}{\operatorname{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{V_\varphi}}{\partial r}\right)-\frac{\overline{V_\varphi}}{r^2}\right]+ +\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{fg}\right)+\frac{\overline{fg}}{r}\right]; \qquad (7)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{uw}\right)-P\left[\overline{V_z}\right]= =\frac{1}{\operatorname{Re}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{V_z}}{\partial r}\right)+\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{fh}\right) \qquad (8)$$

$$\frac{1}{Rm}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{B_\varphi}}{\partial r}\right)-\frac{\overline{B_\varphi}}{r^2}\right]= =\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{ug}-r\overline{fv}\right)+\frac{\overline{vf}}{r}-\frac{\overline{ug}}{r}; \qquad (9)$$

$$\frac{1}{Rm}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{B_z}}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{uh}-r\overline{fw}\right). \qquad (10)$$

Особый интерес представляет азимутальная компонента стационарной поправки — $\overline{V_\varphi}(r)$, свидетельствующая о возможности появления осредненного вращения. Из уравнения (7) легко получить уравнение для азимутальной компоненты плотности потока момента импульса на стенки трубы

$$M(r)\equiv r^2\,\partial/\partial r\left(\overline{V_\varphi}/r\right),$$

$$\left(rM(r)\right)'=\operatorname{Re}\left[r^2\left(\overline{uv}-\frac{Ha^2}{Rm\operatorname{Re}}\overline{fg}\right)\right]'. \qquad (11)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r. Интегрируя выражение (11) один раз, получаем явное выражение для плотности потока момента импульса

$$M(r)=\operatorname{Re}r\left(\overline{uv}-\frac{Ha^2}{Rm\operatorname{Re}}\overline{fg}\right)+Const/r\,. \qquad (12)$$

Из условий прилипания для скорости $u(\tilde{a})=u(\tilde{b})=v(\tilde{a})=v(\tilde{b})=0$ и граничных условий для магнитного поля $f(\tilde{a})= =f(\tilde{b})=0$ следует, что плотности потока момента импульса на внутреннюю и внешнюю стенки канала равны соответственно: $M(\tilde{a})=Const/\tilde{a}$ Ц $M(\tilde{b})=Const/\tilde{b}$, а полные потоки момента импульса одинаковы по величине:

$$M(\tilde{a})2\pi\tilde{a}=M(\tilde{b})2\pi\tilde{b}\ .$$

Одна из стенок излучает, а другая, в соответствии с законом сохранения момента импульса, поглощает равное количество момента импульса. Таким образом, если установится вторичный режим с вращением (с ненулевым моментом импульса), для поддержания вращения не нужно никаких внешних массовых сил.

Проинтегрировав уравнение (12), легко получить выражение для профиля скорости закрутки:

$$\overline{V_\varphi}(r)=r\int_{\tilde{a}}^{r}\frac{\operatorname{Re}}{r}\left(\overline{uv}-\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\overline{fg}\right)dr- -\frac{\tilde{b}^2\left(r^2-\tilde{a}^2\right)}{\left(\tilde{b}^2-\tilde{a}^2\right)r}\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\frac{\operatorname{Re}}{r}\left(\overline{uv}-\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\overline{fg}\right)dr.$$

Из формулы (8) получаем выражение для деформации продольной скорости в случае перехода ко вторичому режиму при фиксированном градиенте давления:

$$\overline{V_z}(r)=\int_{\tilde{a}}^{r}\frac{\operatorname{Re}}{r}\left(\overline{uw}-\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\overline{fh}\right)dr- -\frac{\ln\left(r/\tilde{a}\right)}{\ln\left(\tilde{b}/\tilde{a}\right)}\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\frac{\operatorname{Re}}{r}\left(\overline{uw}-\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}Rm}\overline{fh}\right)dr.$$

Из уравнений (9,10) определяем стационарные поправки второго приближения для магнитного поля $\overline{B_\varphi}(r),\overline{B_z}(r)$. Краевые задачи (9,10) и (4) определяют функции $\overline{B_\varphi}(r),\overline{B_z}(r)$ только с точностью до произвольных слагаемых вида Const и Const/r соответственно. Эти слагаемые возникают из-за выбранной электродинамической постановки задачи — условий абсолютной проводимости стенок — и представляют собой разрывы тангенциальных компонент магнитного поля, связанные с поверхностными токами. Кроме того, краевые условия в виде равенства нулю производных на границах интегрирования (4) налагают ограничение на возможный вид правой части — решение таких задач существует только в том случае, если интеграл от правой части (9,10) в пределах от $\tilde{a}$ до $\tilde{b}$ равен нулю. Как легко видеть, правые части представляются в виде производных от функций, которые равны нулю на границах интегрирования и, очевидно, удовлетворяют краевым условиям. Таким образом, для определения стационарных поправок магнитной индукции недостаточно условий идеальной проводимости стенок. Доопределить задачу можно с помощью введения дополнительных условий для поля. Например, потребуем сохранения потока магнитной индукции в продольном и азимутальном направлениях. Тогда для

$\overline{B_\varphi}, \overline{B_z}$ получим недостающие условия в виде $\int_{\tilde a}^{\tilde b} \overline{B_z(r)}\, r\, dr = 0$ (сохранение потока магнитной индукции через поперечное сечение канала) и $\int_{\tilde a}^{\tilde b} \overline{B_\varphi(r)}\, dr = 0$ (сохранение потока в азимутальном направлении).

Генерация стационарных компонент поля приводит к появлению соответствующих компонент стационарных токов. Используя уравнения (9; 10), легко получить для азимутального тока $\overline{j_\varphi(r)} = -1/r\, \partial/\partial r \left(\overline{B_z(r)}\right)$ уравнение

$$\left(r^2 \overline{j_\varphi(r)}\right)' = -Rm\left\{r\left(\overline{uh} - \overline{fw}\right)\right\}', \qquad \overline{j_\varphi(\tilde a)} = \overline{j_\varphi(\tilde b)} = 0; \tag{13}$$

для продольного тока $\overline{j_z(r)} =$ $= -1/r\, \partial/\partial r \left(\overline{B_\varphi(r)}\right)$ уравнение

$$\overline{j_z(r)}' = Rm\left\{r\left(\overline{ug} - \overline{fv}\right)\right\}', \qquad \overline{j_z(\tilde a)} = \overline{j_z(\tilde b)} = 0. \tag{14}$$

Проинтегрировав (13,14) с учетом равенства нулю первообразной от правых частей при $r = \tilde a, r = \tilde b$, получаем явный вид для стационарных токов, индуцируемых в результате нелинейных эффектов:

$$\overline{j_\varphi(r)}' = -Rm\left\{r\left(\overline{uh} - \overline{fw}\right)\right\}';$$

$$\overline{j_z(r)}' = Rm\left\{r\left(\overline{ug} - \overline{fv}\right)\right\}'.$$

Из уравнений для энергии пульсаций и первого интеграла уравнения для осредненной по цилиндру продольной скорости (8) вытекают следующие общие свойства для пульсаций скорости и магнитного поля, обобщающие аналогичные соотношения общей гидродинамики [3], но с учетом возможности спонтанной закрутки:

$$\frac{P[\overline{V}]}{2}\left\langle \kappa(r)\left(\overline{uw} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fh}\right)\right\rangle = \frac{D}{R} + \left\langle\left[\left(\overline{uw} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fh}\right) + \left[\frac{\left(\tilde b^2 - \tilde a^2\right)}{2r\ln\eta}\left(\left\langle\frac{\overline{uw}}{r} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\frac{\overline{fh}}{r}\right\rangle\right)\right]\right]^2\right\rangle$$

$$+\frac{Ha^2}{R^2}\left[\left\langle\left(\overline{uh} - \overline{fw}\right)^2\right\rangle + \left\langle\left(\overline{ug} - \overline{vf}\right)^2\right\rangle\right] + \left\langle\left[\left(\overline{uv} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fg}\right) - \left[\frac{\left(\tilde b^2 \tilde a^2\right)}{r^2}\left\langle\frac{1}{r^2}\left(\overline{uv} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fg}\right)\right\rangle\right]\right]^2\right\rangle \geq 0,$$

где $D >$ 0 — диссипативная функция;

$$\kappa(r) = r + \frac{\left(\tilde b^2 - \tilde a^2\right)}{(2\ln\eta)r}, \eta = \frac{\tilde a}{\tilde b} \tag{15}$$

и

$$\left\langle \kappa(r)\left(\overline{uw} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fh}\right)\right\rangle = 2\left(P[\overline{V_z}] - P[U]\right)\gamma(\eta) - \frac{2}{\operatorname{Re}}\left(\overline{V_z} - U_z\right), \tag{16}$$

где

$$\gamma(\eta) = 1/8\left[a^2 + b + (b^2 - a^2)/\ln\eta\right] = 1/8\left[(1+\eta^2)/(1-\eta^2) + (1+\eta)/((1-\eta)\ln\eta)\right],$$

$$\gamma(0) = 1/8 \geq \gamma(\eta) \geq \gamma(1) = 1/12.$$

Здесь $P[U]$ — перепад давления, обеспечивающий ламинарное течение жидкости с средней скоростью U; $P[\overline{V_z}]$ — перепад давления, определяющий поток массы турбулентного течения $\langle V_z \rangle$, который определяется формулой

$$\langle V_z \rangle = \frac{b-a}{\nu}\cdot\frac{2}{b^2 - a^2}\int_a^b r\overline{V_z}\, dr = 2\operatorname{Re}.$$

Из соотношения (15) вытекает очевидное неравенство

$$\left\langle \kappa(r)\left(\overline{uw} - \frac{Ha^2}{\operatorname{Re} Rm}\overline{fh}\right)\right\rangle \geq 0. \tag{17}$$

Из формул (16,17) следуют теоремы сравнения для статистически стационарного турбулентного МГД-течения Пуазейля и соответствующего ламинарного течения:

Статистически стационарное турбулентное МГД-течение Пуазейля имеет меньший поток массы $\langle V_z \rangle < \langle U \rangle$, чем ламинарное течение Пуазейля с тем же самым приложенным градиентом давления $P[\overline{V_z}] = P[U]$.

Статистически стационарное турбулентное МГД-течение Пуазейля имеет больший приложенный градиент давления $P[\overline{V_z}] > P[U]$, чем ламинарное течение с тем же самым потоком массы ($\rangle\overline{V_z}\langle = \rangle U\langle$).

Литература

1. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Автоколебания магнитогидродинамических течений в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1992. џ1.
2. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Трехмерные автоколебания магнитогидродинамического течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнитная гидродинамика. 1993. №1.
3. Sagalakov A.M., Yudintsev A.Yu., Yavorsky N.I. The Mechanism of Spontaneous Loss of Symmetry in MHD Flows//Russian Journal of Engeneering Thermophysics. 1995. №4.
4. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск, 1989.
5. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости/ Перев. с англ. Ю.Н. Беляева, И.М. Яворской; Под ред. Г.И. Петрова. М., 1981.