

Г.И. Алгазин, Н.М. Оскорбин

## Математические задачи исследования эффективности эколого-экономических систем с различной информированностью участников

Настоящая работа посвящена математическим постановкам задач, связанных с выбором наиболее приоритетных форм организации эколого-экономических систем (далее ЭЭС). В этом аспекте обсуждаются две полярные формы их организации:

- централизованная, в которой для повышения эффективности системы используется межуровневый обмен информацией;
- децентрализованная, в которой право выбора решений делегируется более информированным участникам и обмен информацией производится на нижних уровнях.

Отличительной чертой работы является концентрация внимания на информационных ресурсах и неопределенности как системообразующих факторах. В основе исследований лежат три основных положения:

- информация асимметрично распределена между участниками ЭЭС. Каждый из них обладает своей собственной информацией, которую не имеют другие, а он использует ее для достижения своих целей, может быть, даже в ущерб интересам остальных участников;
- информация не является бесплатной, она может свободно покупаться и продаваться. Цена информации, как и любого другого ресурса системы или товара, должна быть такой, чтобы результат "купли-продажи" был выгоден каждой из сторон сделки;
- право выбора решений также имеет свою рыночную стоимость. Она должна быть выгодной, по крайней мере, для двух участников: центра и участника, наделенного ответственностью за принятие решения.

Методология проведения данного исследования включает этапы, на которых проводится оценивание эффективности централизованных и децентрализованных систем, и этап заключительного сравнительного анализа.

Для простоты (не принципиальной) и наглядности изложения будем считать, что ЭЭС состоит из двух участников: центра и исполнителя. Пусть  $X_o$  и  $X$  множества выбора решений центра и исполнителя соответственно. Каждый из участников имеет собственный критерий выбора решений,

обозначим их  $F_o$  — для центра и  $f$  — для исполнителя. Будем считать, что они имеют стоимостную природу. Примем также, что исполнитель больше центра информирован о множестве выбора решений  $X$ : для определенности обозначим через  $X'$  априорно известное центру множество выбора решений  $x$ , а через  $X''$  априорно известное исполнителю множество; при этом  $X \supset X'' \supset X'$ .

Пусть в ЭЭС принят централизованный способ формирования решений и приоритет выбора  $x$  принадлежит центру, а точка  $C$  на рисунке 1 является точкой компромисса интересов участников в пространстве критериев  $f$  и  $F_o$  при указанных априорных множествах их информированности и такой, что в рамках действующих между сторонами соглашений не существует лучшей. Соответствующее состояние системы назовем базисным, а  $C$  — базисной точкой. Для более полного представления о построении множества компромиссных решений при различной информированности сторон можно обратиться к работе [1].

Пусть в качестве способа повышения эффективности централизованной ЭЭС используется обмен информацией. Область оптимальных по Парето решений при одинаковой информированности участников, равной информированности исполнителя, показана на рисунке 1 линией 1-5. Как было сказано, информация исполнителя не является для центра бесплатной. Диапазон изменения ее цены (стоимости) определяется двумя естественными ограничениями. С одной стороны, цена  $v$ , которую платит центр исполнителю за информацию, не должна превышать дохода, получаемого центром за счет повышения своей информированности до информированности исполнителя, следовательно,

$$F_o - F_o^c \geq v, \quad (1)$$

где  $F_o^c$  — значение критерия центра для базисной точки  $C$ , т.е. до обмена, а  $F_o$  — после обмена информацией.

С другой стороны, плата за информацию должна восполнить возможные потери эф-

фактивности исполнителя:

$$f^c - f \leq v, \quad (2)$$

где  $f^c$  — значение критерия исполнителя до обмена (вертикальная координата точки  $C$ ), а  $f$  — после обмена информацией.

Система условий (1), (2) совместно с условием  $v \geq 0$  определяет множество точек  $(f, F_o)$  на Парето-границе, соответствующей одинаковой информированности участников, равной априорной информированности исполнителя. Это множество является множеством возможных компромиссов участников. На рисунке 1 оно представлено кривой между точками 2 и 3 и выделено жирной линией. Стрелкой над этой кривой показано направление возрастания цены информации, в нижней точке 3 цена равна нулю. Верхняя точка области компромисса (точка 2) является пересечением Парето-границы (аналитическое выражение которой дается, например, в работе [2]) и прямой линии  $F_o + f = F_o^c + f^c$ , проходящей через точку  $C$ . Поэтому максимально допустимое значение стоимости информации обмена  $X'' \setminus X'$  находится из соответствующей системы условий.

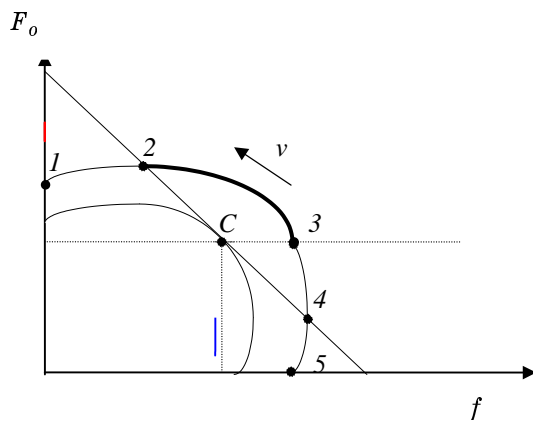


Рис.1 Множество компромиссных решений при обмене платной априорной информацией

Оптимальная для центра цена  $v(X'')$  его дополнительной информированности на множество  $X'' \setminus X'$  определяется из решения задачи

$$\begin{cases} F_o(x_o, x) - v \rightarrow \max_{x_o, x, v} \\ f(x_o, x) + v \geq f^c, \\ x_o \in X_o, \\ x \in X'', \\ v \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

**Утверждение 1.** Для решения

$v(X''), x_o(X''), x(X'')$  задачи (3) выполняется следующее равенство:

$$v(v + f(X'') - f^c) = 0. \quad (4)$$

Доказательство утверждения следует из условий оптимальности Куна-Таккера относительно множителя Лагранжа  $\lambda$ , соответствующего ограничению  $f(x_o, x) + v \geq f^c$ , и переменной  $v$ :

$$L'_v = -1 + \lambda \leq 0, L'_\lambda = v + f - f^c \geq 0,$$

$$L'_v \cdot v = (-1 + \lambda) \cdot v = 0,$$

$$L'_\lambda \cdot \lambda = (v + f - f^c) \cdot \lambda, \lambda \geq 0, v \geq 0,$$

где  $L$  — функция Лагранжа для задачи (3).

Если  $v > 0$ , то  $\lambda = 1$  и  $v + f = f^c$ , т.е.  $f(x_o, x) + v \geq f^c$  выполняется как равенство. Если  $v + f - f^c > 0$ , то  $\lambda = 0$  и  $v = 0$ . Что и требовалось доказать.

Условие равенства нулю цены информации ( $v = 0$ ) означает:

а) либо цели центра и исполнителя согласованы по переменной  $x$  (рост значения критерия  $F_o$  дает рост значения  $f$ ) и бесплатная передача центру исполнителем дополнительной информации выгодна обоим участникам;

б) либо центру не нужна дополнительная информация, т.е. информация о множестве выбора решений  $x$  не является лимитирующим ресурсом.

Если в модели (3) условие  $x \in X''$  заменить условием  $x \in X'$ , то из того, что точка  $C$  является базисной, должно следовать  $v = 0$ .

**Утверждение 2.** В пространстве критерияльных показателей решение задачи (3) лежит на Парето-границе 2-3.

**Доказательство.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} F_o(x_o, x) - v \rightarrow \max_{x_o, x} \\ f(x_o, x) \geq f^c - v(X''), \\ x_o \in X_o, \\ x \in X''. \end{cases}$$

Пусть  $\hat{x}_o, \hat{x}$  — ее решение. Как известно [2],  $F_o(\hat{x}_o, \hat{x}) \cup f(\hat{x}_o, \hat{x})$  лежит на границе 1-5. При этом  $\hat{x}_o, \hat{x}$  вместе с  $x_o(X''), x(X'')$  является решением задачи

$$\begin{cases} F_o(x_o, x) - v(X'') \rightarrow \max_{x_o, x} \\ f(x_o, x) \geq f^c - v(X''), \\ x_o \in X_o, \\ x \in X''. \end{cases}$$

Поэтому  $F_o(x_o(X''), x(X'')) = F_o(\hat{x}_o, \hat{x})$  и  $f(x_o(X''), x(X'')) = f(\hat{x}_o, \hat{x})$ , что доказывает принадлежность решения задачи (3) границе 1-5. Завершение доказательства утверждения следует из условий

$$\begin{aligned} F_o(x_o(X''), x(X'')) - v(X'') &\geq F_o^c, \\ f(x_o(X''), x(X'')) + v(X'') &\geq f^c, v(X'') \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим возможности повышения эффективности центра за счет дальнейшего повышения его информированности. В этой связи будем полагать, что нужная для центра информация может поступать только от исполнителя, и ее получение требует от исполнителя дополнительных затрат.

Обозначим через  $g(X'', X''')$  затраты исполнителя на повышение собственной информированности до множества  $X''' (X'' \subset X''' \subset X)$ ;  $g$  – в общем случае множествонно-точечное отображение. Тогда область компромисса будет задаваться следующей системой условий:

$$\begin{cases} f^c - f + g(X'', X''') \leq v, \\ F_o - F_o^c \geq v, \\ v \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где точки  $(f, F_o)$  выбираются на Парето-границе, соответствующей одинаковой информированности участников, равной  $X'''$ .  $F_o$

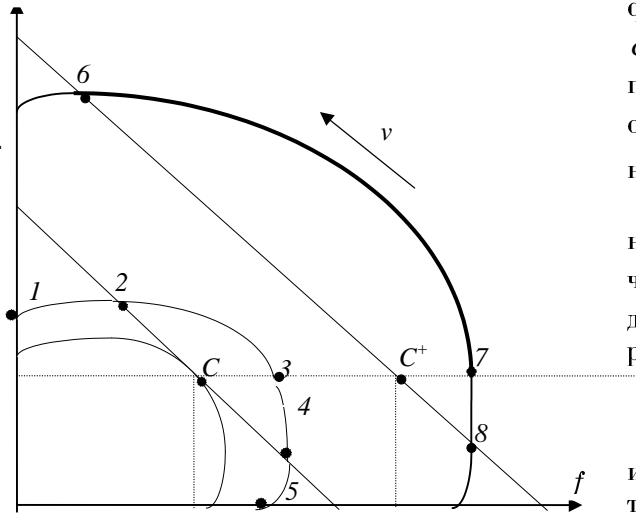


Рис. 2. Множество компромиссных решений при обмене платной дополнительной информацией

На рисунке 2 область компромисса показана жирной линией. Она ограничена снизу горизонтальной прямой  $F_o = F_o^c$ , сверху – прямой линией  $F_o + f = F_o^c + f^c + g(X'', X''')$ , проходящей через точку с координатами  $(f^c + g(X'', X'''), F_o^c)$ . На рисунке 2 расстояние между точками  $C$  и  $C^+$  равно  $g(X'', X''')$ .

Оптимальная для центра цена  $v(X''')$  дополнительной информированности  $X''' \setminus X'$  определяется из решения задачи

$$\begin{cases} F(x_o, x) - v \rightarrow \max_{x_o, x, v} \\ f(x_o, x) + v \geq f^c + g(X'', X'''), \\ x_o \in X_o, \\ x \in X''', \\ v \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для последующего анализа представляет интерес проблема определения оптимального уровня информированности центра за счет стимулирования исполнителя на получение дополнительной информации об объекте управления и ее передачи центру [3]. Базисной для решения этой проблемы является модель следующего мотивационного механизма:

$$\begin{cases} (1 - \delta) \cdot [F_o(\tilde{X}) - F_o^c] + F_o^c \rightarrow \max_{\tilde{X}, \delta} \\ \delta \cdot [F_o(\tilde{X}) - F_o^c] + [f(\tilde{X}) - f^c] - \\ - g(X'', \tilde{X}) \geq 0, \\ 1 > \delta \geq 0, \\ X \supset \tilde{X} \supset X''. \end{cases} \quad (7)$$

Оптимальная для центра цена дополнительной информированности  $X^* \setminus X'$  определяется из равенства

$$v(X^*) = \delta(X^*) \cdot (F_o(X^*) - F_o^c). \quad (8)$$

Здесь  $X^*$  – оптимальное множество информированности системы по переменной  $x$ ,  $\delta(X^*)$  – оптимальная доля дохода центра, переданного исполнителю на стимулирование обмена информацией;  $F_o(X^*), f(X^*)$  – решение задачи (6) при  $X = X^*$ .

Для сравнительного анализа эффективности функционирования ЭЭС важен случай, когда  $\delta(X^*) > 0$ . Тогда ограничение задачи (8) выполняется в форме следующего равенства:

$$\delta(X^*) = \frac{g(X'', X^*) - (f(X^*) - f^c)}{F_o(X^*) - F_o^c} \quad (9)$$

и оценка эффективности затрат для централизованной ЭЭС будет равна отношению

$$\begin{aligned} \Theta_o &= \frac{\Delta F_o + \Delta f}{v(X^*)} = \\ &= \frac{(F_o(X^*) - F_o^c) + (f(X^*) - f^c)}{\delta(X^*) \cdot (F_o(X^*) - F_o^c)} = \\ &= \frac{(F_o(X^*) - F_o^c) + (f(X^*) - f^c)}{g(X'', X^*) - (f(X^*) - f^c)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В числителе этого отношения – увеличение суммы значений критериев всех участников по сравнению с базисным (ис-

ходным) состоянием ЭЭС; в знаменателе – затраты на информированность системы в оптимальном режиме функционирования.

Альтернативным обмену информацией для центра является другой способ повышения эффективности системы – децентрализация. Ценой децентрализации выступает налог, который выплачивают центру наделенные правом принимать решения более информированные участники. Если по-прежнему в качестве базисного состояния системы принять точку  $C$ , то цена децентрализации ( $w \geq 0$ ) должна быть такой, чтобы для участников выполнялись условия

$$\begin{cases} F_o^c - F_o \leq w, \\ f - f^c \geq w. \end{cases} \quad (11)$$

Множество точек, оптимальных по Парето и удовлетворяющих данным условиям, т.е. являющихся компромиссным решением для обоих участников, на рисунке 3 помечено жирной линией. Стрелкой над ней обозначено направление возрастания налога. Это множество ограничено прямыми линиями: сверху  $F_o = F_o^c$ ; снизу  $F_o + f = F_o^c + f^c$ . Поэтому максимально допустимое значение налога (точка 4 на рисунке 3) можно найти из решения соответствующей системы условий.

Оптимальная для исполнителя цена децентрализации  $w(X'')$  определяется из решения задачи

$$\begin{cases} f(x_o, x) - w \rightarrow \max_{x_o, x, w} \\ F_o(x_o, x) + w \geq F_o^c, \\ x_o = x_o^c, \\ x \in X'', \\ w \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_o^c$  – решение центра, соответствующее базисной точке  $C$ .

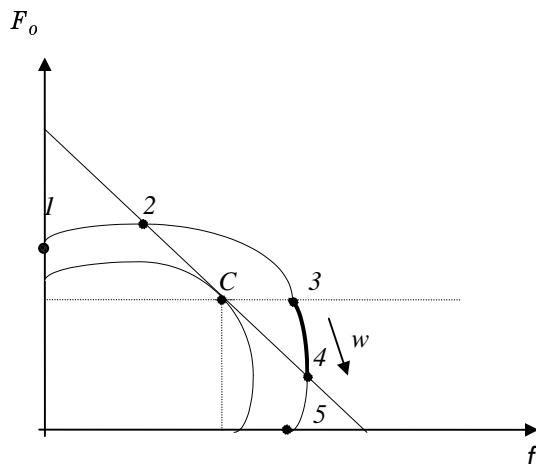


Рис. 3. Множество компромиссных решений при платном делегировании выбора решений более информированному участнику

Для задачи (12) справедливы утверждения 3 и 4, доказательства которых аналогичны вышеприведенным и поэтому опускаются.

**Утверждение 3.** Для решения  $w(X''), x_o(X''), x(X'')$  задачи (12) выполняется равенство

$$w \cdot (w + F_o(X'') - F_o^c) = 0. \quad (13)$$

Равенство нулю цены децентрализации ( $w(X'') = 0$ ) означает:

а) либо децентрализация ничего не дает исполнителю, для него лучшим исходом является выбор базисного решения  $x = x^c$ ;

б) либо цели центра согласованы по переменной  $x$  так, что рост значения критерия  $f$  обеспечивает рост значения  $F_o$ , децентрализация (даже бесплатная) выгодна обеим сторонам.

**Утверждение 4.** В пространстве критериев показателей решение задачи (12) лежит на Парето-границе 3-4.

Если исполнитель, получив самостоятельность, будет пытаться улучшить достигнутый результат за счет повышения собственной информированности до множества  $X''' (X \supset X''' \supset X'')$ , то величина налога должна удовлетворять условиям

$$\begin{cases} F_o^c - F_o \leq w, \\ f - f^c \geq w + g(X'', X'''). \end{cases} \quad (14)$$

Соответствующее множество компромиссов на рисунке 4 обозначено жирной линией (линия 7-8). Естественно, здесь имеется в виду, что функция затрат  $g$  и расширенное множество  $X'''$  таковы, что система условий (14) при  $x_o = x_o^c$  имеет решение.

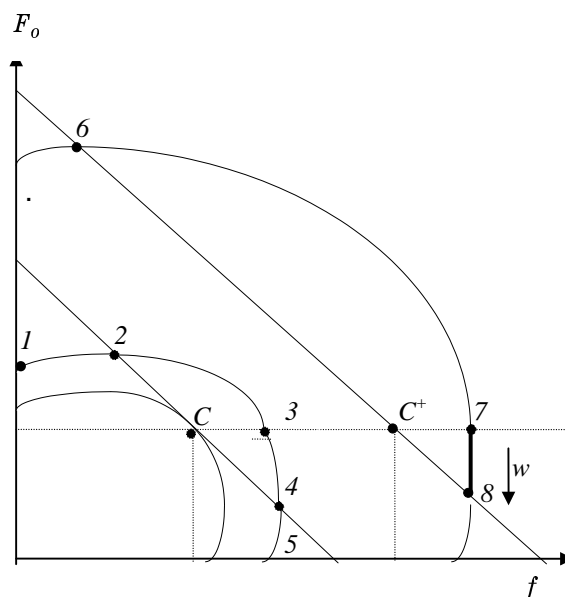


Рис. 4. Множество компромиссных решений при платном делегировании и дополнительной информированности исполнителей

Это множество является частью Парето множества, соответствующего одинаковой информированности каждого участника, равной  $X'''$ . Оно ограничено сверху горизонтальной прямой  $F_o = F_o^c$  (точка 7) и снизу прямой, имеющей наклон к оси ординат в  $135^\circ$  (точка 8) и выражаемой уравнением

$$F_o + f = F_o^c + f^c + g(X'', X'''). \quad (15)$$

Оптимальная цена децентрализации  $w(X''')$ , соответствующая новому множеству информированности исполнителя  $X'''$ , определяется из решения задачи

$$\begin{cases} f(x_o, x) - w \rightarrow \max_{x_o, x, w} \\ F_o(x_o, x) + w \geq F_o^c, \\ f(x_o, x) - f^c \geq w + g(X'', X'''), \\ x_o = x_o^c, \\ x \in X''', \\ w \geq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Можно показать, что для задачи (16) справедливо соотношение, аналогичное (13).

Характеристики оптимального режима функционирования ЭЭС (множество информированности  $X^{**}$ , величина налога

$w(X^{**})$ ) находятся из задачи исполнителя

$$\begin{cases} (1 - \gamma) \cdot [f(\tilde{X}) - f^c] + f^c \rightarrow \max_{\tilde{X}, \gamma} \\ \gamma \cdot [f(\tilde{X}) - f^c] + [F_o(\tilde{X}) - F_o^c] \geq 0, \\ 1 > \gamma \geq 0, \\ X \supset \tilde{X} \supset X''. \end{cases} \quad (17)$$

Оптимальная величина налога тогда будет равна

$$w(X^{**}) = \gamma(X^{**}) \cdot (f(X^{**}) - f^c). \quad (18)$$

Рассмотрим случай  $\gamma(X^{**}) > 0$ . Тогда  $\gamma(X^{**}) \cdot [f(X^{**}) - f^c] + [F_o(X^{**}) - F_o^c] = 0$ ,

$$\gamma(X^{**}) = \frac{F_o^c - F_o(X^{**})}{f(X^{**}) - f^c}. \quad (19)$$

Оценка эффективности затрат для децентрализованной ЭЭС будет равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{д.б.}} &= \frac{\Delta F_o + \Delta f}{w(X^{**}) + g(X'', X^{**})} = \\ &= \frac{(F_o(X^{**}) - F_o^c) + (f(X^{**}) - f^c)}{g(X'', X^{**}) - (F_o(X^{**}) - F_o^c)}. \end{aligned}$$

## Литература

1. Алгазин Г.И. Анализ и моделирование экономических систем с различной информированностью участников // Известия АГУ. г. Барнаул, 1996.
2. Полищук Л.И. Кусочно-линейная аппроксимация паретовой границы выпуклых двухкритериальных задач // Модели и методы исследования экономических систем. Новосибирск, 1979.
3. Алгазин Г.И., Оскорбин Н.М. Стимулирование информационного обмена в распределенных системах управления // Распределенные микропроцессорные управляющие системы и локальные вычислительные сети: Материалы Всесоюз. научно-техн. конф. Томск, 1991.