УДК 514

О.Ю. Матукевич, В.А. Вайгант

Задача внешнего освещения выпуклого множества

Эта работа посвящена проблеме внешнего освещения выпуклого множества и взаимосвязи ее с тремя известными задачами из комбинаторной геометрии. Ее стержнем является известная гипотеза Г. Хадвигера о том, что ограниченное выпуклое тело $K \subset R^n$ может быть покрыто не более чем 2^n телами, гомотетичными телу К с положительным коэффициентом гомотетии, меньшим единицы. В.Г. Болтянским было установлено, что для любого выпуклого тела $K \subset R^n$ задача освещения эквивалентна задаче Г. Хадвигера. Поставленные задачи были решены В.Г. Болтянским и С.П. Солтаном для выпуклых неограниченных тел в пространстве R^3, для выпуклых фигур в R^2, а также для выпуклых тел $K \subset R^n$, имеющих регулярную границу или небольшое число нерегулярных граничных точек. В предлагаемой работе задача внешнего освещения решается для выпуклых ограниченных тел в пространстве R^3.

Пусть К – замкнутое выпуклое тело в R^n. Под направлением L мы будем понимать луч А, сонаправленный с L. Через bd(К) обозначим границу тела К, а через int(К) – внутренность тела К. Точка $x \in bd(K)$ называется освещенной извне направлением L в пространстве R^n, если луч, исходящий из точки x и имеющий направление L, проходит через некоторую внутреннюю точку тела К.

Множество N называется освещенным извне семейством направлений L, если любая точка множества N освещена извне хотя бы одним из направлений, принадлежащих семейству L. Пусть x – некоторая точка считающаяся “источником”, $x \in R^n$, но $x \notin K$. Под источником будем понимать множество всевозможных направлений L, выходящих из точки x. Точка $y \in bd(K)$ называется освещенной извне источником x, если луч [x,y) проходит через некоторую внутреннюю точку тела К, не принадлежащую [x,y].

Множество $N \subset bd(K)$ называется освещенным извне семейством источников $M \subset R^n \setminus K$, если любая точка множества N освещена извне хотя бы одним источником $y \in M$. Перейдем теперь непосредственно к постановке задачи.

Пусть К – замкнутое выпуклое тело в R^n. Задача освещения, а, точнее, задача внешнего освещения при помощи параллельных пучков, состоит в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует семейство L, содержащее m направлений $L_1,\dots,L_m$ и освещающее всю границу тела $K \subset R^n$. Это наименьшее число обозначим через c(К).

Близкая к этой задаче – задача внешнего освещения при помощи точечных источников, которая состоит в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует семейство $M \subset R^n \setminus K$, содержащее m источников $y_1,\dots,y_m$ и освещающее всю границу тела $K \subset R^n$. Это наименьшее число обозначим через c*(К).

Рассмотрим теперь задачу Г. Хадвигера Она состоит в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисил m, что в в пространстве R^n найдутся тела $K_1,\dots,K_m$, каждое из которых гомотетично телу К с некоторым положительным коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, и которые образуют покрытие тела К, т.е. $K \subset K_1 \cup \dots \cup K_m$. Это наименьшее число обозначим через b(К). Если тело К нельзя покрыть никаким конечным числом гомотетичных меньших тел, то полагаем $b(K)=\infty$.

Наконец, рассмотрим еще одну задачу: найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в R^n найдутся тела $K_1,\dots K_m$, каждое из которых получается из К параллельным переносом и которые обладают тем свойством, что их внутренности покрывают тело К, т.е. $K \subset \mathrm{int}(K_1 \cup \dots \cup K_m)$. Это наименьшее число обозначим через b*(К).

В.Г. Болтянским и С.П. Солтаном было установлено, что все четыре задачи эквивалентны.

Теорема 1 [1]. *Для любого ограниченного выпуклого тела* $K \subset R^n$ *справедливы соотношения*

$$b(K)=b^*(K)=c(K)=c^*(K).$$

Г. Хадвигер высказал гипотезу о том, что для любого ограниченного выпуклого тела $K \subset R^n$ справедливо неравенство $b(K) \le 2^n$, причем $b(K)=2^n$, если К – параллелограмм. Следующая теорема подтверждает эту гипотезу в пространстве R^2.

Теорема 2 [1,2]. *Для любой плоской выпуклой ограниченной фигуры* К *в пространстве* R^2, *отличной от параллелограмма, справедливо равенство* c(К)=3, *если* К *является параллелограммом, то* c(К)=4.

Кроме того, В.Г. Болтянским были получены результаты более частного характера.

Теорема 3 [1]. *Если* К – *выпуклое тело с регулярной границей в пространстве* R^n, *то* c(К)=n+1.

Следствие. Пусть T – произвольный n-мерный симплекс в R^n и $L_1,\ldots,L_{n+1}$ – направления, определяемые лучами, проходящими через точку $a\in \mathrm{int}(T)$ и исходящими из вершин симплекса T. Тогда каждая регулярная точка тела $К\subset R^n$ освещается извне хотя бы одним из направлений $L_1,\ldots,L_{n+1}$.

Многогранник называется невырожденным, если он является границей выпуклого тела.

Лемма. *Если* М *невырожденный выпуклый ограниченный многогранник в пространстве* R^3 с *числом вершин не менее* 9, *то существуют две вершины, принадлежащие одному ребру, такие, что их можно осветить одним направлением.*

Из леммы следует вопрос об освещении многогранников.

Теорема. *Любой невырожденный выпуклый ограниченный многогранник в пространстве* R^3 *может быть освещен не более* чем 8 *направлениями.*

Теорема. *В пространстве* R^3 *любое выпуклое ограниченное тело может быть освещено* 8 *направлениями.*

Доказательство. Пусть К – произвольное ограниченное выпуклое тело в R^3. Предположим, что его нельзя осветить 8 или менее направлениями. Произвольно выбираем точку A_1 так, что $A_1 \in \mathrm{bd}(К)$. Рассмотрим множество направлений, освещающих точку A_1, обозначим его через $G(A_1)$. Далее выбираем $A_2\in \mathrm{bd}(К)$, так что ни одно направление из $G(A_1)$ не освещает A_2. Обозначим множество направлений, освещающих A_2 через $G(A_2)$. Отметим, что $G(A_1)\cap G(A_2)=\varnothing$. Выбираем таким же образом точку $A_3\in \mathrm{bd}(К)$ так, что $G(A_1)\cap G(A_3)=\varnothing$ и $G(A_2)\cap G(A_3)=\varnothing$, и так далее. Заканчиваем этот процесс после того, как выбрана точка A_9. Все эти точки существуют, так как мы предположили, что К не освещается 8 или менее источниками.

Рассмотрим выпуклую оболочку этих точек $\{A_1,\ldots,A_9\}$. Получаем многогранник с числом вершин, меньшим либо равным 9. Возможны следующие ситуации:

1. По построению все точки различны, и многогранник является невырожденным с числом вершин в точности 9. Тогда по теореме 1 существуют две вершины (для определенности $A_к$ и A_s), которые могут быть освещены одним направлением, т.е. $G(A_к)\cap G(A_s)\neq\varnothing$. Получаем противоречие с условием построения точек A_i.

2а. Все точки различны, лежат в одной плоскости, и пересечение этой плоскости с int(К) есть не пустое множество, тогда по теореме 3 многоугольник можно осветить тремя направлениями. Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, освещенные одним направлением. Получаем противоречие с условием построения точек A_i, как и в пункте 1.

2б. Все точки различны, лежат в одной плоскости, и пересечение этой плоскости с int(К) есть пустое множество, тогда по теореме 3 многоугольник можно осветить тремя направлениями. Малым "шевелением" этих направлений добиваемся того, чтобы эти направления шли в int(К). Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, освещенные одним направлением. Получаем противоречие с условием построения точек A_i, как и в пункте 1.

Если число вершин меньше 9, т.е. какое-то число вершин лежит на ребрах или гранях (будем считать, что эти вершины A_p (A_p<8), то, освещая оставшиеся вершины, мы осветим и грани и ребра, а значит и вершины A_p. Получаем противоречие как и в пункте 1.

Теорема доказана.

Литература

1. Болтянский В.Г., Солтан П.С., Комбинаторная геометрия различных выпуклых классов, Кишинев, 1978.
2. Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц., Разбиение фигур на меньшие части, М., 1971.