Ю.Н. Мальцев, А.Н. Олексенко

Строение колец с ограничениями на полиномиальные функции

Знаменитая теорема Херстейна (теорема 3.1.3 из [1]) гласит, что если R – ассоциативное кольцо и для любых $x,y \in R$ существует такое целое число $n = n(x,y) > 1$, что $(xy - yx)^{n(x,y)} = \; = xy - yx$, то R коммутативно. В статье [2] получено следующее обобщение теоремы Херстейна:

Теорема. *Пусть R – ассоциативное кольцо и для любых элементов $a,b \in R$ существуют целое число $n = n(a,b) \geq 2$ и центральный элемент $z = z(a,b)$, такие, что $ab - ba = (ab - ba)^n \cdot z$. Тогда радикал Джекобсона $J(R) \subseteq Cent(R)$ и $R/J(R)$ является подпрямым произведением тел D_i, $i \in I$, причем для любых $u,v \in D_i$ и некоторого целого числа $m = m(u,v) \geq 1$ $(uv - vu)^m \in Cent(D_i)$.*

Цель данной работы – изучить строение кольца R, в котором для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_d$ существуют целое число $n = n(a_1, \ldots, a_d) \geq 2$ и центральный элемент $z = z(a_1, \ldots, a_d)$, такие, что

$$h(a_1, \ldots a_d) = h(a_1, \quad \ldots, a_d)^n \cdot z,$$

где $h(x_1, \ldots x_d) \in Z(x_1, \ldots, x_d)$ – полином наиболее общего вида.

Основная теорема

Пусть полином

$$f(x,y) = xh_1(y) + \sum a_{ijk} y^i x^j y^k + \\ + h_2(y)x \in Z\rangle x,y \langle$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha_{0jk} = \alpha_{i0k} = \alpha_{ij0} = 0,$$

$$h_1(1) = \pm 1,$$

$$h_2(1) = \pm 1.$$

Основным результатом этой работы является

Теорема 1. *Пусть R – ассоциативное кольцо и для любых элементов $a,b \in R$ существуют целое число $n = n(a,b) \geq 2$ и центральный элемент $z = z(a,b)$, такие, что $f(a,b) = \; = f(a,b)^n \cdot z$. Тогда в радикале Джекобсона $J(R)$ истинно тождество $f(x,y) = 0$ и $R/J(R)$ является подпрямым произведением тел D_i, $i \in I$, причем для любых $u,v \in D_i$ и некоторого целого числа $m = m(u,v) \geq 1$ $f(u,v)^m \in Cent(D_i)$.*

Везде далее, если не оговорено противное, считаем, что в кольце R выполняются условия теоремы.

Доказательство теоремы основывается на трех вспомогательных леммах.

Лемма 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *для любых $a,b \in R$ элемент $f(a,b)^{n(a,b)-1} \cdot z(a,b)$ является идемпотентом;*

2) *$J(R)$ удовлетворяет тождеству $f(x,y) = 0$;*

3) *любой идемпотент кольца R лежит в $J(R)$.*

Доказательство:

1. $\left(f(a,b)^{n-1} \cdot z\right)^2 =$
$f(a,b)^n \cdot z \cdot f(a,b)^{n-2} \cdot z =$
$f(a,b) \cdot f(a,b)^{n-2} \cdot z = \; f(a,b)^{n-1} \cdot z$.

2. Если $a,b \in J(R)$, то $f(a,b) \in J(R)$. Следовательно, $e = f(a,b)^{n(a,b)-1} \cdot z \in J(R)$, но $e = e^2$ и, поскольку в радикале нет ненулевых идемпотентов, $e = 0$. $f(a,b) = f(a,b) \cdot e = 0$.

3. Пусть $e = e^2 \in R$, $r \in R$ – произвольный элемент. Положим $a = er - ere$, $b = re - ere$. Тогда $ea = a$, $be = b$, $ae = eb = a^2 = b^2 = 0$ и $f(a,e) = \pm a$, $f(b,e) = \pm b$. Из условия теоремы и того, что $a^2 = b^2 = 0$, вытекает, что $a = b = 0$. Таким образом, $re = ere = er$ для любого $r \in R$, следовательно, $e \in Cent(R)$.

Лемма 2. *Пусть пересечение двух любых ненулевых идеалов кольца R не равно нулю. Тогда*

1) *если $e = e^2 \in R$, то $e = 0$ либо e – единица кольца R;*

2) *если $f(a,b) \neq 0$, то этот элемент обратим и $f(a,b)^{n(a,b)-1} \in Cent(R)$.*

Доказательство:

1. Пусть $e = e^2 \in R$. В силу леммы 1.3

$e \in Cent(R)$. Отсюда $A=\{er-r \mid r\in R\} \triangleleft R$ и $B=\{er \mid r\in R\} \triangleleft R$. Очевидно, что $A\cap B=(0)$. Это влечет $A=(0)$ или $B=(0)$. Если $A=(0)$, то e – единица в R. Если $B=(0)$, то $e=e^2\in B$ и $e=0$.

2. Если $f(a,b)\neq 0$, то $f(a,b)^{n-1}\cdot z$ – ненулевой идемпотент. Следовательно, $f(a,b)^{n-1}\cdot z=1$. Поэтому $f(a,b)$ обратим и $f(a,b)^{n-1}=z^{-1}\in Cent(R)$.

Замечание. *Если R – первичное или подпрямо неразложимое, то R удовлетворяет условию леммы 2.*

Доказательство: Если R первично и $A\cap B=(0)$ для некоторых $A,B\triangleleft R$, то $AB\subseteq A$ и $AB\subseteq B$, т. е.

$$AB\subseteq A\cap B=(0).$$

Если R подпрямо неразложимо, то пересечение двух любых ненулевых идеалов кольца содержит ненулевую сердцевину.

Лемма 3. *Если R – примитивное, то R – тело.*

Доказательство: Ввиду теоремы плотности ([3, гл. 2, §2]) R – плотное кольцо линейных преобразований векторного пространства V над телом D. Если $\dim_D V>1$, то существуют $v_1,v_2\in V$, линейно независимые над D. Для v_1, v_2 существуют такие $a,b\in R$, что $v_1\cdot a=v_1$, $v_2\cdot a=0$, $v_1\cdot b=v_2$, $v_2\cdot b=0$. Отсюда $v_1(ab)=v_2$, $v_2(ab)=v_1(ba)=v_2(ba)=0$. Таким образом,

$$v_1 f(a,b)=\pm v_2=v_1\cdot f(a,b)^n\cdot z=$$
$$=v_2\cdot f(a,b)^{n-1}\cdot z=0.$$

Противоречие. Следовательно, $\dim_D V=1$ и $R\cong D$.

Доказательство теоремы 1.

По лемме 1.2 $J(R)$ удовлетворяет тождеству $f(x,y)=0$. Так как радикал является пересечением аннуляторов неприводимых R – модулей, то $R/J(R)\leq\prod_{i\in I}R_i$, где $R_i\cong R/S_i$, $S_i\triangleleft R$ и R_i – примитивные кольца. Так как R_i – гомоморфные образы R, то в них выполняются условия теоремы. По лемме 3 R_i – тела и по лемме 2.2 для любых $u,v\in R_i$

$$f(u,v)^{n-1}\in Cent(R_i).$$

Следствия

Рассмотрим случай, когда полином $f(x,y)$ является однородным, т. е.

$$f(x,y)=\pm xy^n+\alpha_1 yxy^{n-1}+$$
$$+\alpha_2 y^2xy^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-2}y^{n-2}xy^2+$$
$$+\alpha_{n-1}y_{n-1}xy\pm y^n x.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть R – ассоциативное кольцо и для любых элементов $a,b\in R$ существует центральный элемент $z=z(a,b)$, такой, что*

$$f(a,b)=f(a,b)^2\cdot z.$$

Тогда в радикале Джекобсона $J(R)$ истинно тождество $f(x,y)=0$ и $R/J(R)$ является подпрямым произведением полей.

Доказательство: В силу теоремы 1 $f(x,y)=0$ – тождество в $J(R)$, а $R/J(R)$ – подпрямое произведение тел D_i, $i\in I$, удовлетворяющих следующему условию: для любых $u,v\in D_i$ $f(u,v)\in Cent(D_i)=C_i$. Таким образом, $[f(x,y),z]=0$ является тождеством в D_i. Пусть F_i – максимальное подполе в D_i, тогда $[f(x,y),z]=0$ будет тождеством и в $K_i=D_i\otimes_{C_i}F_i$ ([4, §2, предложение 8]), причем K_i является плотным кольцом в $End_{F_i}D_i$ ([4, §3, теорема 3]). Так как K_i – PI, то $K_i\cong M_d(F_i)$. Если $d>1$, то $f(e_{12},e_{11})=\pm e_{12}$ и $[f(e_{12},e_{11}),e_{11}]= =\pm e_{12}\neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $d=1$. Но

$$\dim_{C_i} D_i=\dim_{F_i} D_i\otimes_{C_i}F_i=d^2=1,$$

поэтому $D_i=C_i$.

Аналогичные теоремы верны для полилинейного многочлена

$$g(x_1,\ldots,x_d)=$$
$$=\sum_{(i)\in S_d}\alpha_{(i)}x_{i(1)}\ldots x_{i(d)}\in Z\rangle x_1,\ldots x_d\langle,$$

удовлетворяющего условиям

$$\sum_{(i)=(1\ldots)}\alpha_{(i)}=\pm 1,\quad \sum_{(i)=(\ldots 1)}\alpha_{(i)}=\pm 1.$$

А именно

Теорема 3. *Пусть R – ассоциативное кольцо и для любых элементов $a_1,a_2,\ldots,a_d\in R$ существуют целое число $n=n(a_1,\ldots,a_d)\geq 2$ и центральный элемент $z=z(a_1,\ldots,a_d)$, такие, что $g(a_1,\ldots a_d)=g(a_1,\quad\ldots,a_d)^n\cdot z$. Тогда в радикале Джекобсона $J(R)$ истинно тож-*

дество $g(x_1,\dots,x_d)=0$ *и* $R/J(R)$ *является подпрямым произведением тел* D_i, $i\in I$, *причем для любых* $u_1,u_2,\dots,u_d\in D_i$ *и некоторого целого числа*

$$m=m(u_1,\dots,u_d)\geq 1$$

$$g(u_1,\dots,u_d)^m\in C(D_i).$$

Доказательство: Аналогично доказательству теоремы 1 со следующими незначительными изменениями: в доказательстве пункта 3 леммы 1 $g(a,e,\dots,e)=\pm a$, $g(b,e,\dots,e)=\pm b$; в доказательстве леммы 3

$$v_1\cdot g(b,a,\dots,a)=\pm v_2,\ v_2\cdot g(b,a,\dots,a)=0.$$

Теорема 4. *Пусть* R *— ассоциативное кольцо и для любых элементов* $a_1,a_2,\dots,a_d\in R$ *существует центральный элемент* $z=z(a_1,\dots,a_d)$ *такой, что* $g(a_1,\dots a_d)=g(a_1,\quad\dots,a_d)^2\cdot z$. *Тогда в радикале Джекобсона* $J(R)$ *истинно тождество* $g(x_1,\dots,x_d)=0$ *и* $R/J(R)$ *является подпрямым произведением полей.*

Доказательство: Теорема доказывается так же, как теорема 2. При установлении изоморфизма между $K_i=D_i\otimes_{C_i}F_i$ и F_i используется тот факт, что

$$g(e_{12},e_{11},\dots,e_{11})=\pm e_{12}.$$

Литература

1. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972.
2. Putcha M., Wilson R., Yaqub A. Structure of rings satisfying certain identities on commutators. Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972). 57 - 62.
3. Джекобсон Н. Строение колец. М., 1961.
4. Mal'cev Y. N. The structure of associative algebras satisfying the polynomial identities and varieties of algebras. Barnaul, 1994.