Дронов С.В.

К возможности перенесения функций на гипердействительные структуры

Основные понятия и обозначения

Принятые в работе обозначения следуют, в основном, [1].

Под натуральными числами мы понимаем специальным образом построенные множества, упорядоченные по включению. Класс всех натуральных чисел обозначим N, класс конечных натуральных чисел — FN. Начальные отрезки класса N по включению будем называть сегментами. В частности, N, FN и любое натуральное *n* — сегменты. Сегмент A назовем мультипликативным (аддитивным), если произведение (сумма) любых двух его элементов является вновь элементом A. Договоримся всюду ниже рассматривать только сегменты, содержащие FN, чтобы избежать тривиальных затруднений.

Введем обозначения. Пусть Q — класс рациональных чисел, A — аддитивный сегмент.

$\mathrm{BQ(A)} = \{\, x \in Q \mid (\exists\alpha \in A)(|x| \le \alpha)\,\}$.

Если A=FN, то условимся полученный класс обозначать через BQ. Зададим на BQ(A) отношение $\overset{\circ}{=}_A$, которое назовем A-отождествлением:

$$(x \overset{\circ}{=}_A y) \Leftrightarrow ((\forall\alpha \in A)(|x-y| \le \frac{1}{\alpha})).$$

Положим ${}^*_A R = BQ(A)/\overset{\circ}{=}_A$

В случае, когда A=FN, построенный объект обозначают R. Функцию *g*: $Q \to Q$ условимся называть sd-определимой, если найдется такая теоретико-множественная формула ψ, что $(\forall x \in {}^*_A R)(\psi(x, g))$

От рациональных к гипердействительным

Пусть *f*: $Q \to Q$ — sd-функция, A — сегмент. Функцию *f* назовем A-непрерывной, если

$$(\forall x \in BQ(A))(\forall\alpha \in A)(\exists\beta \in A)$$

$$(\forall y)((|y-x| \le \frac{1}{\beta}) \Rightarrow (|f(y)-f(x)| \le \frac{1}{\alpha}))$$

и A-конечной, если

$$((\forall x \in BQ(A))(\exists\alpha \in A)(|f(x)| \le \alpha))$$

Всюду в этом разделе условимся отрезки рассматривать как подклассы Q.

Лемма Гейне-Бореля 1

Пусть C — мультипликативный сегмент, $n, j \in FN$ — последовательность его порождающих, $n \in C$ и Σ — некоторое семейство подклассов Q с условием

$$(\forall y)((|y-x| \le \frac{1}{\beta}) \Rightarrow (|f(y)-f(x)| \le \frac{1}{\alpha}))$$

$$((\alpha - 1/n_j, \alpha + 1/n_j) \subseteq \xi)) \qquad (1)$$

Тогда из Σ можно выбрать подсемейство $\Sigma_1 = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ такое, что $m \in C$ и $\bigcup\{\xi_j, j \le m\} \supseteq [-n, n]$.

Эта лемма доказывается, как и в классическом случае, методом от противного (ср [2, с. 181]).

Пусть A — сегмент. Если $x_1 \in Q$, $x \in {}^*_A R$ таков, что x_1 является его представителем как класса эквивалентности, то условимся писать $x = {}^\circ_A x_1$ и называть *x* A-интерпретацией x_1. Введем также и "обратное" обозначение: операцию взятия представителя условимся обозначать $*$. Так, $x_1 = {}^*x$. Естественно, эта операция не является однозначной.

Рассмотрим теперь $f: Q \to Q$ A-конечную sd-функцию. Определим ее перенесение f^A на ${}^*_A R$ естественным образом: пусть $x \in {}^*_A R$, положим $f^A(x) = {}^\circ_A f({}^*x)$. Будем говорить, что *f* корректно переносима на ${}^*_A R$, если построенное *f* не зависит от выбора конкретного представителя *x*.

Следующая теорема практически очевидна.

Теорема 1 *Пусть A — сегмент, $f: Q \to Q$ A-конечная sd-функция. Тогда f является A-непрерывной тогда и только тогда, когда она корректно переносима на ${}^*_A R$*

Построенное перенесение не обязано обладать свойствами f, даже если эти свойства выражаются теоретико-множественными формулами. Например, если $f(x) = x^2$, мы очевидно имеем $f(x) \ne 2$ при $x \in Q$. С другой стороны, *f*(*x*) также имеет вид x^2, но выписанное свойство нарушается (см., на-

пример [3]). Попытаемся описать класс свойств, которые сохраняются у перенесений.

Определим класс позитивных теоретико-множественных формул языка FL (sd^+ – формулы). Пусть x, y – переменные для множеств.

1. $x=y$, $x \in y$ – sd^+ – формулы;
2. если φ, ψ – sd^+ – формулы, то $\varphi \& \psi, \varphi \vee \psi$, – sd^+ – формулы;
3. если $\varphi(x)$ – sd^+ – формула, то $((\forall x)(\varphi(x)))$ – sd^+ – формула.

Пусть A – сегмент. Определим класс A-позитивных формул

1. если φ – sd^+ – формула, то φ – A-позитивная формула;
2. если φ, ψ – A-позитивные формулы, то $\varphi \& \psi, \varphi \vee \psi$, – A-позитивные формулы;
3. если $\varphi(x)$ – A-позитивная формула, то $((\forall x)(\varphi(x)))$ – A-позитивная формула;
4. если $\varphi(x)$ – A-позитивная формула, то $((\exists x \in BQ(A))(\varphi(x)))$ – A-позитивная формула.

Если Z – произвольный подкласс Q, то обозначим через $\overset{\circ}{_A}Z$ подкласс $\overset{*}{_A}R$, состоящий из элементов $\overset{\circ}{_A}x, x \in Z$. Для произвольной формулы φ через φ^A обозначим формулу, полученную из φ A-интерпретацией всех ее кванторов и констант и, в частности, заменой всюду в ней BQ(A) на $\overset{*}{_A}R$. В частности, в φ^A все вхождения функции f заменяются на f^A, поскольку во введенных обозначениях $f^A = \overset{\circ}{_A}f$. Определим также и в некотором смысле обратную процедуру для формул. По формуле φ построим формулу $\widetilde{\varphi}$, заменив все подформулы вида x=a в ней на $x \overset{\circ}{=}_A a$, а все подформулы вида $x \in a$ на

$x \in \widetilde{a} \equiv \{y: \overset{\circ}{_A}y \in a\}$

Теорема 2 *Пусть φ – A-позитивная формула*

1. *если для некоторого конечного набора $x_1,...,x_n$ рациональных чисел $\varphi(x_1,...,x_n)$, то $\varphi^A(\overset{\circ}{_A}x_1,...,\overset{\circ}{_A}x_n)$;*

2. *если для некоторого конечного набора $x_1,...,x_n$ рациональных чисел $\varphi^A(\overset{\circ}{_A}x_1,...,\overset{\circ}{_A}x_n)$, то $\widetilde{\varphi}(x_1,...,x_n)$.*

Доказательство проводится индукцией по сложности формулы φ.

Следствие 1. *Если свойство A-непрерывной sd-функции выражается A-позитивной формулой, то оно наличествует и у f^A*

В частности, свойство монотонности может быть выражено sd^+ – формулой, а следовательно, сохраняется при перенесениях. Свойство A-непрерывности, которое выражается A-позитивной формулой, интерпретируется на $\overset{*}{_A}R$ в виде свойства, которое мы назовем свойством $\varepsilon - \delta -$ непрерывности.

Уточнения

Теорема 3 *Пусть $f: Q \to Q -$ sd-функция, A – мультипликативный $\sigma -$ сегмент, причем f A-конечна и A-непрерывна, $n_0 \notin A$ – натуральное число. Тогда найдется такой мультипликативный $\sigma -$ сегмент B, что $A \subset B \subset n_0$ и f является B-конечной и B-непрерывной.*

Доказательство. Поскольку A – мультипликативный сегмент, то можно без ограничения общности считать, что

$$A = \bigcup \{n_j, j \in FN\},$$

причем при произвольном конечном j справедливо $n_{j+1} > n_j^2$.

Перепишем свойство A-непрерывности в виде

$$((\forall j \in FN)(\forall x_0 : |x_0| < n_j)(\forall i \in FN)$$

$$(\exists k = k(i,j,x_0))((|x - x_0| < \frac{1}{n_k}) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n_i}))).$$

Покроем каждое $x_0 \in \lfloor -n_j, n_j \rfloor$ отрезком

$$\Delta_k(x_0) = \left[x_0 - \frac{1}{n_k}, x_0 + \frac{1}{n_k}\right].$$

Заметим, что в силу A-конечности функции можно выбрать такое $s = s(k, x_0)$, что при всех $x \in \Delta_k(x_0)$ справедливо

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + \frac{1}{n_i} < n_s.$$

По лемме Гейне-Бореля построим подпокрытие отрезка $\lfloor -n_j, n_j \rfloor$ отрезками Δ_k с центрами $x_1,...,x_\gamma$, $\gamma \in A$. Пусть

$$k(i,j) = \max\{k(i,j,x_p), 1 \le p \le \gamma\},$$

$$s_k = \max\{s(k,x_p), 1 \le p \le \gamma\}.$$

Построенные k,s не зависят от конкрет-

ных x. Продолжим последовательности $n_j, k(i,j), s_k \quad i,j \in FN$ с условиями

$$((|x| \le n_j) \,\&\, (|x_0| \le n_j)) \Rightarrow$$

$$((|x - x_0| \le \frac{1}{n_k}) \Rightarrow$$

$$(|f(x) - f(x_0)| \le \frac{1}{n_i}));$$

$$n_j \le n_0; \quad n_{j+1} \ge n_j^2;$$

$$((|x| \le n_j) \Rightarrow (|f(x)| \le n_{s_k})$$

до некоторого $\alpha \notin FN$. Построим σ –сегмент C с условием $FN \subset C \subset \alpha$ и положим $B = \bigcup \{n_j, j \in C\}$. Т.к. C – σ-сегмент, то он обладает монотонно возрастающей последовательностью порождающих $m_p, p \in FN$. Нетрудно заметить, что

$$B = \bigcup \{n_{m_p},\ p \in FN\},$$

т.е. B – σ-сегмент. При этом $B \ne A$, поскольку C шире FN. Теорема доказана, т.к. остальные свойства B выполнены по построению.

Теперь из теорем 3 и 1 получаем

Следствие 2 *Пусть* $f: Q \to Q$ *sd-функция, корректно непрерывно переносимая на некоторое* ${}_A^*R$*, где А – мультипликативный* σ*-сегмент. Тогда найдется такая более тонкая гипердействительная структура* ${}_B^*R$*, построенная по некоторому мультипликативному* σ *-сегменту В, что f также корректно непрерывно переносится на* ${}_B^*R$.

Пусть теперь f – $\varepsilon - \delta$-непрерывная функция на некотором ${}_A^*R$, определенная sd^+-формулой φ. Тогда, согласно теореме 2, на Q можно построить функцию g, заданную формулой ,$\tilde{\varphi}$, которая также будет sd^+-формулой, причем, поскольку свойство А-непрерывности задается А-позитивной формулой, то g будет А-непрерывна. По следствию 2 мы имеем возможность построить некоторую более тонкую, чем ${}_A^*R$, структуру ${}_B^*R$, на которую g корректно непрерывно переносится. Обозначим полученную функцию f_B. Эта функция будет обладать всеми свойствами f , задаваемыми sd^+-формулами и будет определена на ${}_B^*R$. Итак, нами доказана

Теорема 4 *Пусть А – мультипликативный* σ*-сегмент, и задана* $f{:}{}_A^*R \to {}_A^*R$ sd^+*-функция, являющаяся* $\varepsilon - \delta$*-непрерывной на* ${}_A^*R$*. Тогда найдется такой мультипликативный* σ*-сегмент* $B \supset A$ *и такая* sd^+*-функция* $f{:}{}_B^*R \to {}_B^*R$*, которая обладает свойствами f, выражаемыми* sd^+*-формулами.*

Выбрав в теореме $f(x)=x$, получим

Следствие 3 (теорема о вложении) *Пусть А – мультипликативный* σ*-сегмент,* $n_0 \notin A$*. Тогда найдется такой мультипликативный* σ*-сегмент В,* $A \subset B \subset n_0$*,* $A \ne B$*, что* ${}_A^*R$ *изоморфно в смысле сохранения всех свойств, выражаемых* sd^+*-формулами, в частности, свойств сложения, умножения и порядка, вкладывается в .* ${}_B^*R$.

Тем самым мы доказали вложение соответствующих структур без использования принципа уточнения функций из [4]. Применяя следствие 3 к утверждению теоремы 4, получим

Следствие 4 *В утверждении теоремы 4 можно считать, что* ${}_A^*R$ *изоморфно вложено в* ${}_B^*R$ *и при всех* $x \in {}_A^*R$ *справедливо* $f(x) = f_B(x)$.

Литература

1. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. М.;Мир, 1983.– 150 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1 М.:Наука, 1969.– 608 С.
3. Дронов С.В., Козлов С.Д. К вопросу о представлении действительных чисел десятичными дробями в AST./ Деп. в ВИНИТИ 15.01.1992.– N 151B92.– 22 С.
4. Дронов С.В., Козлов С.Д. К проблеме уточнения действительных функций в AST.// Геометрия многомерных пространств.– Барнаул: АГУ, 1994.– с 88 – 98.