

Н.Б. Еремеева, С.С. Кузиков

Метод численного решения задачи протекания для системы уравнений неоднородной жидкости

Предлагается метод численного расчета задачи протекания вязкой неоднородной жидкости. Полученная методами конечных элементов и баланса разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, решается итерационным методом. Представлены различные варианты результатов расчета, демонстрирующие появления зон расслоения течения жидкости при малых числах Фруда.

Вопросы численного моделирования уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в последние годы привлекли к себе значительное внимание математиков и механиков. Это обусловлено не только теоретическим интересом, но и широкими возможностями применения данной модели при решении многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии и т.д. Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения жидкости. Одним из проявлений указанного фактора является возможность выборочного изъятия определенных слоев водной массы из устойчиво стратифицированного водоема. Обзор литературы по аналитическим и численным исследованиям стратифицированных течений, вопросы корректности задач протекания приводятся в работах [1-5].

В двумерном случае, который рассматривается в настоящей работе, при численном исследовании используются уравнения Навье-Стокса, записанные как относительно физических переменных скорость – давление [6], так и в переменных функция тока – вихрь [7]. Общим недостатком последнего метода является использование в том или ином виде граничного условия для вихря на твердой поверхности, которое отсутствует в физической постановке задачи. Наличие дополнительного итерационного процесса, связанного с указанным граничным условием для вихря, лимитирует скорость сходимости численных алгоритмов. Очевидная ограниченность методов решения в переменных функция тока – вихрь в случае исследования пространственных потоков вязкой жидкости объясняет возросший в последнее время интерес к численному решению уравнений Навье-Стокса, записанных в естествен-

ных переменных скорость – давление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} &= \\ &= -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u} + \frac{1}{Fr^2} \bar{g} \rho; \\ \text{div } \bar{u} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \rho &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) записана в безразмерных переменных. Здесь компоненты скорости $\bar{u} = (u, v)$ отнесены к характерной скорости u_0 , координаты x, y – к характерной длине L , время – к L/u_0 , давление отнесено к $\rho_0 u_0^2$, где ρ_0 – характерная плотность; вектор $\bar{g} = (0, -1)$; $\Delta \rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$, $Fr = u_0 / \sqrt{gL \Delta \rho / \rho_0}$ – число Фруда; $\text{Re} = u_0 L / \nu$ – число Рейнольдса; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность, отнесенная к ρ ; g – ускорение свободного падения. В случае медленных течений ($u_0 \ll 1$) в водоемах вытянутой формы, большой протяженности можно опустить нелинейные инерционные члены [4].

В области

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1,$$

$$\varphi(x) \leq y \leq f(x), \varphi(x) < f(x)\}$$

(рис.1)

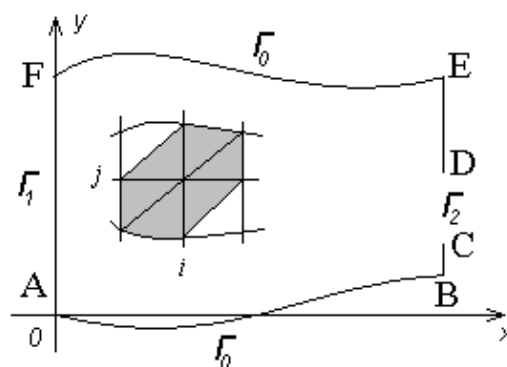


Рис. 1. Область течения

для стационарной системы (1) ставится следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_0} &= 0, u|_{\Gamma_1} = h_1(y) \geq 0, \\ u|_{\Gamma_2} &= h_2(y) \geq 0, \\ v|_{G} &= 0, v|_{G_1} = \rho_1(y) \text{ (при } h_1(y) > 0), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $\Gamma_0 = ABC \cup DEF$; $\Gamma_1 = AF$ — участок втекания; $\Gamma_2 = CD$ — участок вытекания; $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Для построения дискретного аналога задачи (1)-(2) в области Ω используется сетка $\omega^h = \left\{ (x_i, y_j): x_i = ih, y_j = jh, h = 1/M, \right. \\ \left. h_i = (f(x_i) - \varphi(x_i))/N, 0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N \right\}$, где M и N — целые положительные числа. Посредством Ω^h обозначим множество четырехугольников $\Omega_{ij}, i = 0, M-1, j = 0, N-1$ с вершинами $(x_i, y_{ij}), (x_{i+1}, y_{i+1,j}), (x_{i+1}, y_{i+1,j+1}), (x_i, y_{i,j+1})$, а Γ_{ij} — граница Ω_{ij} . Каждый четырехугольник разбивается на два треугольника посредством соединения вершин (x_i, y_{ij}) и $(x_{i+1}, y_{i+1,j+1})$. Пусть H — пространство непрерывных функций, линейных на каждом треугольнике, а Q — множество функций, постоянных на каждом четырехугольнике Ω_{ij} . В качестве базисных функций пространства H возьмем известные «пирамиды» Куранта, носитель которых изображен на рисунке 1 в виде шестиугольника. Множество этих функций

$$\begin{aligned} M_{ij}(x_k, y_{km}) &= \delta_{ik} \delta_{jm}, i, k = 0, \\ M, j, m &= 0, N; \end{aligned}$$

и являются линейными на каждом треугольнике разбиения области Ω^h . Каждая функция $W^h \in H$ может быть представлена как

$$W^h = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N W_{ij} M_{ij}(x, y), \quad (3)$$

где W_{ij} значение $W^h(x, y)$ в узле (x_i, y_{ij}) .

Значения $\rho_{ij}, i=1, M, j=0, N, (\rho_{0j} = \rho_1(y_{0j}), j=0, N)$ будем искать из условия минимума функционала, к построению которого сейчас приступаем. Считая, что выполнено условие $\text{div } \bar{u} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} I_{ij}(\rho) &= \int_{\Omega_{ij}} (u \rho_x + v \rho_y) dx dy = \\ &= \oint_{\Gamma_{ij}} u \rho dy - v \rho dx \approx \\ &\approx \frac{1}{2} [(u_{ij} \rho_{ij} + u_{i+1,j} \rho_{i+1,j})(y_{i+1,j} - y_{ij}) + \\ &+ (u_{i+1,j+1} \rho_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} \rho_{i+1,j}) h_{i+1} + \\ &+ (u_{i,j+1} \rho_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} \rho_{i+1,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1}) - \\ &- (u_{ij} \rho_{ij} + u_{i,j+1} \rho_{i,j+1}) h_i - \\ &- (v_{i+1,j} \rho_{i+1,j} + v_{ij} \rho_{ij}) h + \\ &- (v_{i,j+1} \rho_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} \rho_{i+1,j+1}) h] = \\ &= \alpha_{ij} \rho_{ij} + b_{ij} \rho_{i+1,j} + c_{ij} \rho_{i+1,j+1} + d_{ij} \rho_{i,j+1}, \\ & i = 0, M-1, j = 0, N-1. \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } I(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{ij}^2.$$

Минимум этого функционала будем искать как решение системы

$$\frac{\partial I(\rho)}{\partial \rho_{ij}} = 0, i = 1, M, j = 0, N,$$

что приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} I_{ij} + b_{i-1,j} I_{i-1,j} + c_{i-1,j-1} I_{i-1,j-1} + \\ + d_{i,j-1} I_{i,j-1} &= 0 \\ i = 1, M, j = 0, N. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе (4) полагаем $I_{ij} = 0$, если выполнено одно из условий:

$$i < 0, i > M-1, j < 0, j > N-1.$$

Приближенным решением задачи (1)-(2) назовем совокупность функций

$$\{u^h, v^h, \rho^h, P^h\} \in H \times H \times H \times Q,$$

удовлетворяющих системе (4) и соотношениям

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} \text{grad } \bar{u}^h \cdot \text{grad } \bar{W}^h + (P^h, \text{grad } \bar{W}^h) + \\ + ((\bar{u}^h \text{grad}) \bar{u}^h, \bar{W}^h) = \frac{1}{Fr^2} (\bar{g} \rho^h, \bar{W}^h); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\text{div } \bar{u}^h, 1)_{\Omega_{ij}} \equiv \int_{\Omega_{ij}} \text{div } \bar{u}^h dx dy = 0, \\ i = 0, M-1, j = 0, N-1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{u}^h = (u^h, v^h)$; $\bar{W}^h = \{M_{ij}(x, y), M_{km}(x, y)\}$; $i, k = 1, M-1; j, m = 1, N-1$;

$(u^h, v^h) = \int_{\Omega^h} u^h(x, y) v^h(x, y) dx dy$ — скалярное

произведение в пространстве $L_2(\Omega^h)$ – функций, интегрируемых с квадратом. Систему (4)–(6) решаем итерационным методом по следующей схеме (опущен индекс h):

$$-\frac{1}{\text{Re}}(\nabla \bar{u}^{n+1}, \nabla \bar{W}) + (P^{n+1}, \nabla \bar{W}) +$$

$$+ ((\bar{u}^n \nabla) \bar{u}^n, \bar{W}) = \frac{1}{Fr^2} (\bar{g} \rho^n, \bar{W}); \quad (7)$$

$$P^{n+1} \Big|_{\Omega_{ij}} = P^n \Big|_{\Omega_{ij}} - \tau \beta' \text{div} \bar{u}^{n+1} \Big|_{\Omega_{ij}}, \quad (8)$$

где

$$\text{div} \bar{u}^{n+1} \Big|_{\Omega_{ij}} = \frac{1}{\text{mes} \Omega_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} (u_x + v_y) dx dy =$$

$$= \frac{1}{\text{mes} \Omega_{ij}} \oint_{\Gamma_{ij}} u dy - v dx =$$

$$= \frac{1}{2 \text{mes} \Omega_{ij}} [(u_{i+1,j} + u_{ij})(y_{i+1,j} - y_{ij}) +$$

$$+ (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j})h_{i+1} +$$

$$+ (u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1}) -$$

$$- (u_{i,j} + u_{i,j+1})h_i -$$

$$- (v_{i+1,j} + v_{i,j})h + (v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1})h].$$

Система (7)–(8) относительно \bar{u}^{n+1}, P^{n+1} решается (β, τ) -методом, подробное изложение которого можно найти, например, в [8]. Система (4) имеет положительно определенную симметричную матрицу, свойства которой установлены в работе [9]. Для решения этой системы применялся попеременно-треугольный метод [10]. На рисунках 2, 3, 4 приведены изображения линий уровня функции тока $\psi(x, y)$ течений в прямоугольной области. Здесь $\text{Re}=1$,

$$h_1(y) = 4y(1-y), 0 \leq y \leq 1,$$

$$h_2(y) = 256y(0.25-y), 0 \leq y \leq 0.25,$$

$\rho_1(y) = 1 - \psi(0, y)$. Значения чисел Фруда указаны под рисунками. Приведенные результаты демонстрируют влияние величины плотностного числа Фруда на характер течения.

Литература

1. Yin C.S. Stratified flows. New York, 1980.
2. Васильев О.Ф., Квон В.И., Лыткин Ю.М., Розовский И.Л. Стратифицированные течения // Итоги науки и техники. Гидродинамика. Т. 8. М., 1975.
3. Белолипецкий В. М., Костюк В. Ю., Шокин Ю. М. Математическое моделирование стратифицированной жидкости. Новосибирск, 1991.
4. Белолипецкий В.М., Гекова С. Н., Туговиков В. Б., Шокин Ю.М. Численное моделирование задач гидродетермики водотоков. Новосибирск, 1994.
5. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородной жидкости. Новосибирск, 1983.
6. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., 1984.
7. Кускова Т. В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 3. М., 1972.
8. Кобельков Г. М. О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление // Вычислительные процессы и системы. Вып. 8. М., 1991.
9. Кузиков С. С., Семенов С. П. Метод численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. Т. 4. с.12. 1995.
10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

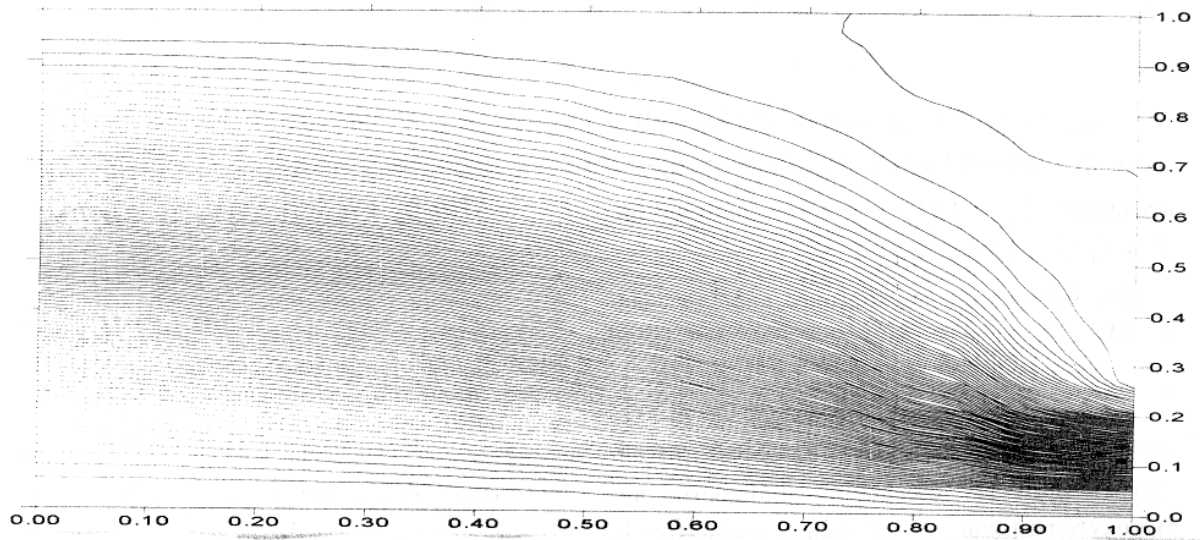


Рис. 2. Изображение изолиний функции тока при $Fr=0.1$

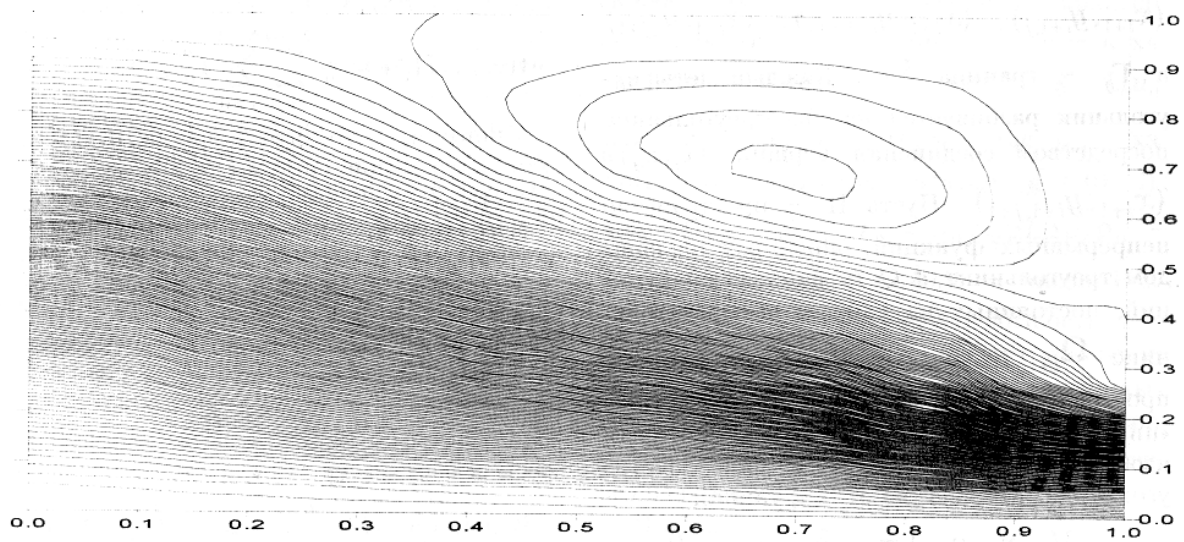


Рис. 3. Изображение изолиний функции тока при $Fr=0.05$

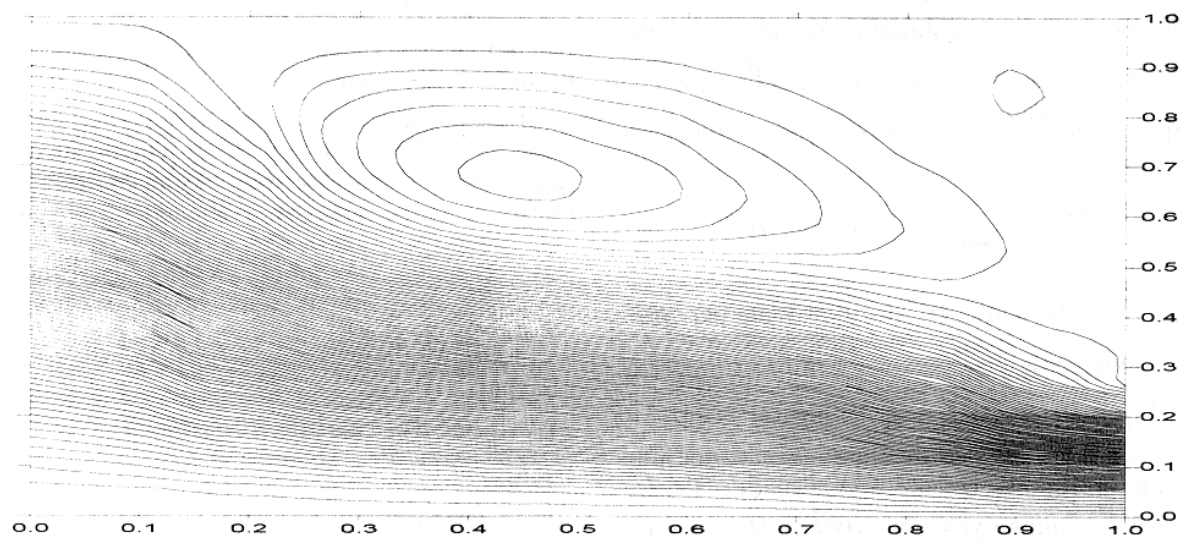


Рис. 4. Изображение изолиний функции тока при $Fr=0.04$