УДК 514.75

М.А. Чешкова

К геометрии диффеоморфных поверхностей в евклидовом пространстве

В евклидовом пространстве E^{n+m} рассматриваются две гладкие n-поверхности $M,\bar{M}$ и диффеоморфизм $f:M\to\bar{M}$. Исследуется гессиан функции $\rho=\frac{1}{2}|b|^2$, где $b=\bar{r}-r, r$ — радиус-вектор точки $p\in M, \bar{r}$ — радиус-вектор точки $f(p)\in\bar{M}$.

На поверхности M определены две метрики: собственная $g(x,y)=<x,y>$, где $x,y\in TM$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+m}, и метрика $\bar{g}(x,y)=<dfx,dfy>$, индуцируемая отображением f, две связности Леви-Чивита $\nabla,\bar{\nabla}$ этих метрик, две квадратичные формы: вторая фундаментальная форма α поверхности M со значением в $T_pM^{\perp}$ и $\bar{\alpha}$ индуцируемая отображением f из второй фундаментальной формы поверхности $\bar{M}$ со значением в $T_{f(p)}M^{\perp}$. Разложим вектор b на касательную $U,-\bar{U}$ и нормальную составляющие $\tau,-\bar{\tau}$. Имеем, где

$$U\in T_pM, \tau\in T_pM^{\perp},$$
$$\bar{U}\in T_{f(p)}\bar{M}, \bar{\tau}\in T_{f(p)}\bar{M}^{\perp}.$$

Теорема

Имеет место формула

$$Hess^{\nabla}_{x,y}\rho=g(\bar{\nabla}_xy-\nabla_xy,U)+\bar{g}(x,y)- -g(x,y)+<\alpha(x,y),\tau>- -<\bar{\alpha}(x,y),\bar{\tau}>-(L_Ug)(x,y), \quad (1)$$

где $Hess^{\nabla}_{x,y}\rho$ — гессиан функции ρ в связности ∇, L_U — производная Ли вдоль U.

Основные формулы

Пусть $F(M)-R$ — алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ — F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (s,q), ∂ — дифференцирование в E^{n+m}. Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид [см.: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., 1981. С. 23]

$$\partial_xy=\nabla_xy+\alpha(x,y), \quad \partial_x\xi=-\underset{\xi}{A}x+\nabla^{\perp}_x\xi, \quad (2)$$

где $x,y\in T^1_0(M), \xi$ — поле нормальных векторов, $\underset{\xi}{A}\in T^1_1(M)$ — оператор Вейнгартена, соответствующий полю ξ, $\nabla^{\perp}$ — нормальная связность, α — вторая фундаментальная форма поверхности M.

Определим связность $\bar{\nabla}$ на M из условия, что разность

$$\bar{\alpha}(x,y)=\partial_xdfx-df\bar{\nabla}_xy \quad (3)$$

для $p\in M$ принадлежит $T_{f(p)}\bar{M}^{\perp}$.

Лемма. *Связность $\bar{\nabla}$ есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$.*

Доказательство.

$$Z\bar{g}(x,y)=<\partial_zdfx,dfy>+<dfx,\partial_zdfy>= =<df\bar{\nabla}_zx+\bar{\alpha}(z,x),dfy>+ +<dfx,df\bar{\nabla}_zy+\bar{\alpha}(z,y)>,$$
$$Z\bar{g}(x,y)-\bar{g}(\bar{\nabla}x,y)-\bar{g}(x,\bar{\nabla}_zy)= =(\bar{\nabla}_z\bar{g})(x,y)=0.$$

Имеем

$$\partial_xdfy-\partial_ydfx-df[x,y]= =\partial_x\partial_y\bar{r}-\partial_y\partial_x\bar{r}-\partial_{[x,y]}\bar{r}=0.$$

В силу формулы (3) получим $\bar{\nabla}_xy-\bar{\nabla}_yx=[x,y]$, $\bar{\alpha}(x,y)=\bar{\alpha}(y,x)$. Следовательно, $\bar{\nabla}$ — связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$ и $\bar{\alpha}$ — квадратичная форма.

Доказательство.

Дифференцируем равенство $\rho=$ $=\frac{1}{2}<\bar{r}-r,\bar{r}-r>$ вдоль $x\in T^1_0(M)$.

Имеем

$$\partial_x\bar{r}=dfx, \partial_xr=x, x\rho=<dfx-x,\bar{r}-r>,$$
$$xy\rho=<\partial_xdfy-\partial_xy,b>+ +<dfy-y,dfx-x>.$$

Используя (2), (3), получим

$$Hess^{\nabla}_{x,y}\rho=xy\rho-\nabla_xy\rho=<\partial_xdfy-\partial_xy,b>+ +<dfx-x,dfy-y>-<df \quad \nabla_xy-\nabla y,b>= =<\bar{\alpha}(x,y),b>+<\bar{\nabla}_xy-\nabla_xy,b>- -<\alpha(x,y),b>+<dfx,dfy>+<x,y>- -<dfx,y>-<x,dfy>.$$

Дифференцируем равенство $f(r)=$ $=r+U+\tau$ вдоль $x\in T^1_0(M)$. В силу (2) имеем

$$xf(r) = dfx = x + \nabla_x U -$$
$$- \underset{\tau}{A} x + \alpha(x,y) + \nabla_x^{\perp}\tau,$$
$$< dfx, y > + < x, dfy >= 2g(x,y) -$$
$$- 2g\left(\underset{\tau}{A} x, y\right) + g(\nabla_x U, y) + g(x, \nabla_y U).$$

Так как

$$(L_U g)(x,y) = Ug(x,y) - g([U,x],y) -$$
$$- g(x,[U,y]) = g(\nabla_x U, y) + g(x, \nabla_y U)$$

и (1, с. 23) $g\left(\underset{\tau}{A} x, y\right) = < \alpha(x,y), \tau >$, получим

$$< dfx, y > + < x, dfy >= 2g(x,y) -$$
$$- 2 < \alpha(x,y), \tau > + (L_{Ug} g)(x,y).$$

Итак

$$Hess_{x,y}^{\nabla} \rho =< \nabla_x y - \nabla_x y, b > +$$
$$+ < \alpha(x,y), b > - < \alpha(x,y), b > +$$
$$+ \overline{g}(x,y) - g(x,y) +$$
$$+ 2 < \alpha(x,y), \tau > - (L_U g)(x,y).$$

Используя разложение вектора b, получим (1).

Следствия и примеры

Пусть $f : M \to \overline{M}$ изометрия. Тогда из (1) имеем

$$Hess_{x,y}^{\nabla} \rho = g\left(\underset{\tau}{A} x, y\right) - g\left(\underset{\tau}{\overline{A}} x, y\right) - - (L_U g)(x,y), \qquad (4)$$

где $\underset{\tau}{\overline{A}} \in T_1^1(M)$ определяется из равенства $g\left(\underset{\tau}{\overline{A}} x, y\right) = < \alpha(x,y), \tau >$.

Пусть $x_i (i = 1,\dots,n)$ — базис $T_p M$, $g_{ij} = g(x_i, x_j)$. Рассмотрим лапласиан $\Delta\rho = g^{ij} Hess_{x_i,x_j}^{\nabla} \rho$. Так как

$$(L_U g)(x_i, x_i) = g(\nabla_{x_i} U, x_j) + g(x_i, \nabla_{x_j} U) =$$
$$= g((\nabla_{x_i} U^k) x_k, x_j) + g(x_i, (\nabla_{x_j} U^k) x_k),$$

то

$$g^{ij}(L_U g)(x_i, x_j) = 2\nabla_{x_i} U^i = 2 divU.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta\rho = tr \underset{\tau}{A} - tr \underset{\tau}{\overline{A}} - 2 divU. \qquad (5)$$

Следствие 1. Если M компактно и f изометрия, то

$$\int_M \left(tr \underset{\tau}{A} - tr \underset{\tau}{\overline{A}} \right) d\delta = 0, \qquad (6)$$

где $d\delta$ — элемент объема на M.

Доказательство. В силу теоремы Грина на компактном M $\int_M \Delta\rho\, divU d\delta = 0$, $\int_M divU d\delta = 0$. Откуда следует (6).

Следствие 2. Если f — изометрия компактных поверхностей и $tr \underset{\tau}{A} - tr \underset{\tau}{\overline{A}} \geq 0 (\leq 0)$, то $tr \underset{\tau}{A} = tr \underset{\tau}{\overline{A}}$.

Изометрия $f : M \to \overline{M}$ называется переносом Клиффорда [с. 102], если $\rho = const$.

Следствие 3. Если f — перенос Клиффорда, то следующие утверждения эквивалентны:

1) U — киллингово поле;
2) $tr \underset{\tau}{A} = tr \underset{\tau}{\overline{A}}$.

Пример 1. $M, \overline{M}$ — плоские торы в E^4. $r = (\cos U, \sin U, \cos V, \sin V)$, $\overline{r} = (-\sin U, \cos U, -\sin V, \cos V)$, $f(r) = \overline{r}$ — перенос Клиффорда, $\rho = 2, \overline{g} = g = \delta$, где δ — тензор Кронеккера.

$$b = r_U + r_V - \overline{r}_U - \overline{r}_V, U = r_U + r_V,$$
$$\tau = -\overline{r}_U - \overline{r}_V, \underset{\tau}{\overline{A}} = \underset{\tau}{A} = \delta, L_U g = 0.$$

Если вектор b ортогонален к M, то $U = 0$.

Следствие 4. Если f — отображение вдоль нормали к поверхности M, то

$$Hess_{x,y}^{\nabla} \rho = \overline{g}\left(x - \underset{\tau}{\overline{A}} x, y\right) - g\left(x - \underset{\tau}{A} x, y\right)$$

В частности, если вектор b нормален к M и касателен к $\overline{M} (U = 0, \tau = 0)$, то

$$Hess_{x,y}^{\nabla} \rho = \overline{g}(x,y) - g\left(x - \underset{\tau}{A} x, y\right)$$

Еще более упрощается формула, если $\overline{M}$ — эволюта поверхности M в E^{2n}, т.е. $\overline{M}$ — огибающая нормальных n-плоскостей поверхности M. Тогда

$$< dfx, y >= 0, g(x,y) - g\left(\underset{\tau}{A} x, y\right) = 0,$$
$$\underset{\tau}{A} x = x.$$

Откуда $Hess_{x,y}^{\nabla} \rho = \overline{g}(x,y), \overline{\Delta}\rho = n.$

Следствие 5. Для компактных поверхностей не существует гладких эволют.

Пример 2. Поверхность M есть поверхность переноса $r = r_1(s_1) + r_2(s_2)$ в E^4, линии переноса $\gamma_i : r_i = r_i(s_i), (i = 1,2)$ — плоские кривые, расположенные во взаимно ортогональных z-плоскостях. Поверхность $\overline{M}$ — поверхность переноса, линии переноса γ_1, γ_2 которой — эволюты кривых γ_1, γ_2.

Если $s_i, k_i, \{t_i, v_i\}$ — длина дуги, кривизна и репер Френе кривой $\gamma_i (i = 1,2)$ соответственно, то

$$\overline{r} = r_1(s_1) + \frac{1}{k_1(s_1)} V_1(s_1) +$$
$$+ r_2(s_2) + \frac{1}{k_2(s_2)} V_2(s_2).$$

Имеем $\overline{U} = 0, \tau = 0$.

$$g = \delta, \quad \overline{g} = \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{k_1(s_1)} \right)' & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{k_2(s_2)} \right)' \end{pmatrix} \right).$$

Если при этом $f: M \to \overline{M}$ изометрия, то $\left(\dfrac{1}{k_i(s_i)}\right)$©$=1$ и кривые $\gamma_i (i=1,2)$ – логарифмические спирали.