УДК 514

Ю.Г. Никоноров

Об оценке радиуса вписанного шара и диаметра выпуклой фигуры через интегралы поперечных мер

В этой работе мы опишем связь между радиусом вписанного шара и диаметром выпуклого тела при ограничении сверху на значение одного из интегралов поперечных мер Минковского.

Пусть V – множество выпуклых компактных тел в пространстве R^k, снабженное метрикой Хаусдорфа. Через $d = d(A)$ и $r = r(A)$ будем обозначать соответственно диаметр A и радиус вписанного в A шара. Очевидно, что $d \geq 2r$.

Определим функцию $\Phi : V \to R^2$ таким образом, что каждому выпуклому телу A функция Φ ставит в соответствие точку $(d(A)/2, r(A))$. Нетрудно заметить, что образ V при отображении Φ лежит в конусе, ограниченном лучами, исходящими из начала координат под углами 0 и $\pi/4$.

Для выпуклого тела A рассмотрим интегралы поперечных мер Минковского $W_i(A), i = 0,1,...,k$. Отметим, что эти величины могут быть введены различными способами (Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., 1966. С. 286. Далее в скобках указаны страницы.), но для тел с регулярной границей при $1 \leq i \leq k$ выражаются как интегралы по поверхности от элементарных симметрических функций от $k-1$ главных кривизн, а именно:

$$W_i(A) = \frac{1}{iC_n^i} \int [k_1,...,k_{i-1}] dF ,$$

где $[k_1,...,k_{i-1}]$ – $i-1$-я элементарная симметрическая функция от кривизн $k_l (l = 1,...,k-1)$.

Отметим также, что $W_0(A)$ равняется объему V выпуклого тела A, $kW_1(A) = F$ – площадь поверхности A, $kW_{k-1}(A)$ – норма A, $W_k = \omega_k$ – объем k-мерного единичного шара.

Отметим, что любой интеграл поперечной меры Минковского W_i как функционал на V является неотрицательно определенным, монотонным, непрерывным и однородным степени $k-i$. (С. 288).

Для произвольного положительного числа D и натурального $i (i = 0,1,...,k)$ определим подмножество выпуклых тел $V_i^D = \{A \in V / W_i(A) \leq D\}$. Рассмотрим задачу нахождения образа множества V_i^D при отображении Φ.

Учитывая, что функционал W_k является константой, имеет смысл решать задачу при $i = 0,1,...,k-1$.

Для решения поставленной задачи мы найдем при заданных r и d выпуклое тело A с минимальным значением $W_i(A)$.

Введем вспомогательное семейство фигур $T(r, p, q)$ $(p \geq r, q \geq r)$. Для этого рассмотрим шар радиуса r с центром в начале координат O и точки P и Q, лежащие на первой координатной оси на расстояниях p и q от точки O в положительном и отрицательном направлениях оси соответственно. Выпуклую оболочку указанного шара и точек P, Q назовем $T(r, p, q)$.

Теорема 1. *Функционал W_i достигает наименьшего значения среди всех выпуклых тел с заданными радиусом вписанного шара r и диаметром d на $T(r, d/2, d/2,)$.*

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. *Функционал W_i достигает наименьшего значения среди тел $T(r, p, q)$, где $p + q = d$ на $T(r, d/2, d/2)$.*

Доказательство. Выпишем формулу для вычисления $W_i(T(r,t,t))$ (С. 298)

$$W_i(T(r,t,t)) = r^{k-i}\left(\omega_k + \frac{\omega_{k-1}}{k} S\right)$$

где $S = \int\limits_0^{\arccos r/t} \frac{\sin^k \tau}{\cos^2 \tau} d\tau$.

Нетрудно получить выражение для $W_i(T(r, p, q))$, учитывая, что $W_i(T(r, p, q))$ состоит из половины $W_i(T(r, p, p))$ и половины $W_i(T(r, q, q))$.

Пусть

$$f(t) = W_i(T(r,t,t)) =$$
$$= r^{k-i}\left(\omega_k + \frac{\omega_{k-1}}{k}\int_0^{\arccos r/t}\frac{\sin^k\tau}{\cos^2\tau}d\tau\right)$$

Покажем, что функция f выпукла при $t \ge r$. Действительно,

$$f'(t) = \frac{2r^{k-i-1}\omega_{k-1}}{k}\left(1-\frac{r^2}{t^2}\right)^{(k-1)/2}$$
$$f''(t) = \frac{2r^{k-i+1}\omega_{r-1}(k-1)}{k}\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{r^2}{t^2}\right)^{(k-3)/2}\frac{1}{t^3} > 0$$

при $t > s$. Поскольку f выпукла, то $f\left(\frac{p+q}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(p)+f(q))$, или, что то же самое, $W_i(T(r,d/2,d/2)) \le W_i(T(r,p,q))$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим A – выпуклое тело с радиусом r и диаметром d. Пусть O_1 – центр вписанного шара, а точки P_1 и Q_1 тела A находятся на расстоянии d друг от друга. Рассмотрим теперь тело A_1 – выпуклую оболочку вписанного шара и точек P_1, Q_1. Так как функционал W_i монотонный, то $W_i(A_1) \le W_i(A)$.

Проведем через точку O_1 прямую, параллельную прямой P_1Q_1, и возьмем на ней точки P_2 и Q_2 так, чтобы четырехугольник $P_1P_2Q_2Q_1$ был прямоугольником. Поскольку длина отрезка P_1Q_1 равняется диаметру тела A, то длины отрезков P_2O_1 и Q_2O_1 (обозначим их через p и q соответственно) не меньше чем r (в противном случае найдется отрезок в теле A большей длины, чем r).

Проведем через прямую P_2Q_2 гиперплоскость и подвергнем тело A_1 симметризации Штейнера относительно α. (С. 232). Через каждую точку x ортогональной проекции S тела A_1 на гиперплоскость α проведем прямую l, перпендикулярную к α. Она пересечет тело A_1 по отрезку длины l_x. Сопоставим точке x замкнутый отрезок длины l_x, лежащий в l, и с центром в точке x. Объединение всех таких отрезков образует тело A_1, которое и называется симметризацией Штейнера тела A_1.

Заметим, что при симметризации Штейнера интегралы поперечных мер Минковского ω_i не увеличиваются (С. 351), поэтому $W_i(\tilde{A}_1) \le W_i(A_1)$. Кроме того, очевидно, что $\tilde{A}_1$ – выпуклое тело, которое содержит шар с центром O_1 и радиусом r, а также точки P_2 и Q_2. Рассмотрим A_2 – выпуклую оболочку указанного шара и точек P_2, Q_2. Тогда $A_1 \subset \tilde{A}_1$, таким образом, в силу монотонности функционала $W_i(A_1) \le W_i(\tilde{A}_1)$. Очевидно, что тело A_2 изометрично $T(r,p,q)$. Используя лемму, находим, что $W_i(A_2) \le W_i(T(r,p,q)) \le W_i(T(r,d/2,d/2))$.

Таким образом,

$$W_i(A) \le W_i(T(r,d/2,d/2)),$$

что и требовалось доказать.

Теперь определим для каждого натурального и натурального $i < k$ и положительного D множество P_i^D на плоскости R^2. Отнесем ко множеству P_i^D все точки плоскости, ограниченные лучами прямых $y=0$ и $y=x$, лежащими в первой координатной четверти и кривой $\psi(x,y)=D$, где

$$\psi(x,y) = y^{k-i}\left(\omega_k + \frac{\omega_{k-1}}{k}\int_0^{\arccos y/x}\frac{\sin^k\tau}{\cos^2\tau}d\tau\right).$$

Поясним корректность такого определения и выведем некоторые свойства множества P_i^D.

При $x > y > 0$ кривая $\psi(x,y)=D$ может быть явно задана.

Действительно, при $x > y > 0$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{2r^{k-i-1}\omega_{k-1}}{k}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{(k-1)/2} > 0,$$

что нами уже использовалось.

Можно также показать, что $\frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$ при тех же условиях. Проще всего это сделать, заметив, что $\psi(x,y) = W_i(T(y,x/2,x/2))$. Поскольку функционал W_i монотонный, то $\frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$. Следовательно, при $x > y > 0$ множество точек, задаваемое условием $\psi(x,y)=D$, может быть представлено как график некоторой функции $x = g(y)$, причем функция g дифференцируема и убывающая, поскольку $g' = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 2. *Множество P_i^D является образом V_i^D при отображении Φ.*

Доказательство. Покажем, что $P_i^D \subset \Phi(V_i^D)$. В силу однородности функционала W_i луч прямой $y = ax(0 < a \le 1)$, лежащий в первой координатной четверти, пересекает кривую $\psi(x,y)$ в единственной точке M. Очевидно, что существует некоторое $(\alpha > 0)$, такое, что точка M является образом $T(a\alpha, \alpha/2, \alpha/2)$ при отображении Φ. Опять же в силу однородности W_i любая точка указанного луча, лежащая между M и началом координат, есть образ тела $T(a\beta, \beta/2, \beta/2)$ при отображении Ψ для некоторого β $(\alpha \ge \beta > 0)$.

Покажем теперь, что $\Phi(V_i^D) \subset P_i^D$. Пусть A – выпуклое тело, удовлетворяющее условию $W_i(A) \le D$, с диаметром d и радиусом вписанного шара r. Заметим, что $W_i(T(r, d/2, d/2)) \le W_i(A) \le D$, и тело $T(r, d/2, d/2)$ имеет тот же диаметр и радиус вписанного шара, что и A. Но $\Phi(T(r, d/2, d/2)) \in P_i^D$, поэтому и $\phi(A) = \Phi(T(r, d/2, d/2)) \in P_i^D$.

Теорема доказана.

Представляется интересным выяснить условия, при которых множество P_i^D является ограниченным. В силу убывания функции $x = g(y)$ это равносильно конечности предела $\lim_{y\to 0} g(y)$. Если этот предел конечен, то диаметры всех тел из V_i^D ограничены в совокупности некоторой константой.

Теорема 3. *При $i = k-1$ диаметр выпуклых тел из V_i^D не превышает величины $\frac{kD}{\omega_{k-1}}$, при $i < k-1$ в V_i^D существуют тела со сколь угодно большим диаметром.*

Доказательство. Нам требуется найти асимптотику функции $x = g(x)$ при $y \to 0$. Удобнее воспользоваться неявным заданием этой функции: $\psi(x,y) = D$. Заметим, что

$$\int_0^{\arccos y/x} \frac{\sin^k \tau}{\cos^2 \tau} d\tau =$$

$$= \frac{\sin^{k+1}\tau}{\cos\tau}\Bigg|_0^{\arccos y/x} - k \int_0^{\arccos y/x} \sin^k \tau d\tau =$$

$$= \frac{x}{y}\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{(k+1)/2} - k \int_0^{\arccos y/x} \sin^k \tau d\tau.$$

Так как $0 < \int_0^{\arccos y/x} \sin^k \tau d\tau < \pi/4$, а x больше некоторой положительной константы в силу убывания функции $x = g(y)$, то при $y \to 0$ мы имеем асимптотическое равенство для функции $x = g(y)$:

$$\frac{2\omega_{k-1}}{k} y^{k-i-1} g(y) \sim D.$$

При $i = k-1$ получаем, что $\lim_{y\to 0} g(y) = \frac{kD}{2\omega_{k-1}}$, и диаметр любого тела из V_i^D не превосходит величины $\frac{kD}{\omega_{k-1}}$.

Если же $i < k-1$, то

$$g(y) \sim \frac{kD}{2\omega_{k-1}} y^{i+1-k}$$

при $y \to 0$. Значит, среди тел, принадлежащих V_i^D, существуют тела со сколь угодно большим диаметром.

Заметим, что для собственных выпуклых тел A из V_i^D выполнено строгое неравенство $d(A) < \frac{kD}{\omega_{k-1}}$, которое не может быть улучшено.

Из последней теоремы получаем очевидное следствие.

Следствие. Пусть выпуклое тело A имеет норму N, тогда его диаметр не превосходит величины $\frac{N}{\omega_{k-1}}$.

Отметим, что при $k = 3$ норма N тела A совпадает с M – интегралом от средней кривизны. В этом случае вышеприведенное следствие можно переформулировать так:

Пусть интеграл от средней кривизны трехмерного выпуклого тела равен M, тогда диаметр тела не превосходит величины $\frac{M}{\pi}$.