УДК 514.765

Е.Д. Родионов

Односвязные компактные стандартные однородные эйнштейновы многообразия с группой голономии $SO(n)$

В данной работе исследуются односвязные компактные однородные многообразия со стандартной, т. е. полученной из формы Киллинга, однородной римановой метрикой, удовлетворяющей уравнению Эйнштейна (стандартные эйнштейновы многообразия), имеющие группу голономии $SO(n)$.

Пусть $M=G/H$ – компактное односвязное однородное пространство, H – замкнутая подгруппа, а G – связная полупростая группа Ли, эффективно действующая на M диффеоморфизмами $\tau(y)$: $xH \to yxH$. Обозначим через g и h алгебры Ли групп G и H соответственно. Элементу $y \in G$ сопоставим гладкий изоморфизм G на себя $I(y)$: $x \to yxy^{-1}$. Положим $Ad(y)=dI(y)_e$, где e – единица G, а отображение $X \to [YX]$ алгебры g обозначим через adY. Так как форма Киллинга $\mathrm{tr}(adXadY)$ алгебры g отрицательно определена, то рассмотрим скалярное произведение $B(X,Y)=-\mathrm{tr}(adXadY)$ алгебры g, и B – ортогональное разложение алгебры $g=h\oplus m$. Тогда пара (g,h) редуктивна относительно данного разложения, т. е. $g=h\oplus m$ – прямая сумма, Отождествим m с $T_{eH}(G/H)$ при помощи естественной проекции $p:G \to G/H$. Пусть $\chi: x \to d\tau(x)_{eH}$, $x \in H$ – представление изотропии группы Ли H в пространстве $T_e(G/H)$. Очевидно, что $\chi(x)=Ad(x)|_m$ для $x \in H$. Положим также $\chi(Y)(X)=[Y,X]$ для $Y \in h, X \in m$. Ограничение скалярного произведения B на m индуцирует G – инвариантную риманову метрику ρ_B на однородном пространстве G/H.

Определение 1. *Однородная риманова метрика ρ_B на G/H, индуцируемая скалярным произведением B полупростой алгебры Ли g, называется стандартной однородной римановой метрикой пространства G/H, а многообразие $(G/H,\rho_B)$ – стандартным однородным римановым многообразием.*

Обозначим через Ric тензор Риччи стандартного однородного риманова многообразия. Тогда справедлива формула [1]

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=(1/2)B(X,Y)+(1/4)\mathrm{tr}\,R(X)R(Y) \quad \forall X,Y \in m, \tag{1}$$

где $R(X): Z \to [Z,X]_m$, $Z \in m$.

Определим на дополнении m две операции по правилам:

$$X*Y=[X,Y]_m, \tag{2}$$
$$I(X,Y,Z)=-[[X,Y]_h,Z],$$

где $X,Y,Z \in m$.

Пара $(m,*)$ представляет собой конечномерную антикоммутативную алгебру над полем действительных чисел с тождествами, полученными из тождеств алгебры Ли g при проекциях на m и h.

Следуя А.В. Сабинину [2], дадим

Определение 2. *Тройная алгебра Ли $(L.t.a.)$ есть антикоммутативная алгебра $(A,*)$ над полем F с трилинейной операцией $(X,Y,Z) \to [X,Y,Z] \in A$, удовлетворяющей следующим тождествам:*

$$[X,X,Y]=0;$$
$$\sigma\{[X,Y,Z]+(X*Y)*Z\}=0;$$
$$\sigma\{[X*Y,Z,U]\}=0;$$
$$[X,Y,U*V]=[X,Y,U]*V+U*[X,Y,V];$$
$$[U,V,[X,Y,Z]]=[[U,V,X],Y,Z]+$$
$$+[X,[U,V,Y],Z]+[X,Y,[U,V,Z]],$$

где символ σ означает циклическую сумму по $X,Y,Z \in A$.

Если мы определим операции $*$ и I на редуктивном дополнении m по формулам (2), то $(m,*,I)$ становится $L.t.a.$, называемой тройной алгеброй Ли редуктивного однородного пространства. Обратно, произвольная тройная алгебра Ли определяет, локально, некоторое однородное пространство [2].

Определение 3. *Редуктивное однородное пространство $M=G/H$ с разложением $g=h+m$ называется специально редуктивным, если алгебра $(m,*)$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением.*

Известно [1; 3], что каждое односвязное стандартное однородное риманово пространство разложимо в прямое риманово произведение симметрического и специально редуктивного пространства. Отсюда следует, что для классификации стандартных эйнштейновых многообразий достаточно рассмотреть случай специально редуктивных пространств.

Исследуем более подробно случай, когда односвязное компактное специально редуктивное стандартное однородное риманово многообразие $(G/H, \rho_B)$ является голономно неприводимым относительно римановой связности ∇. В силу односвязности $M = G/H$ группа голономии Φ и суженная группа голономии Φ_0 пространства M совпадают, а алгебра голономии $\varphi = L(m)$ порождается преобразованиями вида $L_x : Y \to 1/2(X * Y)$, $X, Y \in m$, и действует неприводимо на m [4]. В этом случае либо G – простая группа Ли, а (M, ρ_B) является кэлеровым или кватернионным многообразием, либо $\Phi = SO(n)$, $\varphi = so(n)$, где $n = \dim M$ [5, с. 126]. Так как односвязные компактные стандартные однородные эйнштейновы многообразия (M, ρ_B) с простой транзитивной группой движений классифицированы [6-8], то рассмотрим более подробно случай, когда $\Phi = SO(n)$. Пусть $\mathrm{tr}\, WV$ (где $W, V \in so(n)$) – форма Киллинга алгебры $so(n)$, тогда $(W, V) = -\mathrm{tr}\, WV = \mathrm{tr}\, WV^t$ представляет собой инвариантное скалярное произведение алгебры Ли $\varphi = so(n)$, задающее биинвариантную риманову метрику на группе Ли $\Phi = SO(n)$. Так как $\varphi = L(m)$, то $\|L_x\|^2_{so(n)} = -trL_x^2 = trL_x L_x^t$, где $L : Y \to 1/2(X * Y)$, $X, Y \in m$.

Теорема 1. *Пусть $(G/H, \rho_B)$ – односвязное компактное специально редуктивное стандартное однородное риманово многообразие, являющееся голономно неприводимым с группой голономии $\Phi = SO(\dim G/H)$, G – связная полупростая группа Ли, действующая эффективно на $M = G/H$, H – замкнутая подгруппа G. Тогда*

(1) *кривизна Риччи многообразия (M, ρ_B) вычисляется по формуле*

$$\mathrm{Ric}(X, X) = (1/2)B(X, X) - \|L_x\|^2_{so(n)},$$

где $X \in S_1^{n-1}(m)$, $S_1^{n-1}(m)$ – гиперсфера радиуса 1 в m, $n = \dim M$;

(2) *многообразие (M, ρ_B) является эйнштейновым в том и только том случае, если $\|L_x\| = const \quad \forall X \in S_1^{n-1}(m)$;*

(3) *многообразие (M, ρ_B) является эйнштейновым с константой Эйнштейна C в том и только том случае, если образом большой сферы $S_1^{n-1}(m)$ при линейном отображении $L : X \to L_x$ является большая сфера $S_1^{n-1}(\varphi)$ радиуса $r = \sqrt{1/2 - C}$, в алгебре голономии $\varphi = so(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $X \in S_1^{n-1}(m)$, тогда из формулы (1) следует, что

$\mathrm{Ric}(X, X) = (1/2)B(X, X) + (1/4)\mathrm{tr}\, R(X)R(X)$.

Далее,

$$(1/4)\mathrm{tr}\, R(X)R(X) = (1/4)\sum_i B(((X_i * X) * X), X_i) =$$
$$= (1/4)\sum_i B(X * (X * X_i), X_i) =$$
$$= \sum_i B(L_x^2(X_i), X_i) = trL_x^2 = -\|L_x\|^2_{so(n)}.$$

Отсюда следуют утверждения (1) и (2) теоремы.

Пусть (M, ρ_B) – эйнштейново многообразие с константой Эйнштейна C. Покажем сначала, что для любых X_1, $X_2 \in S_1^{n-1}(m)$ скалярное произведение $B(X_1, X_2) = 0$ в том и только том случае, если $(L_{x_1}, L_{x_2}) = 0$. Действительно, пусть $B(X_1, X_2) = 0$, тогда $\|X_1 + X_2\|_0 = \sqrt{2}$, а $(X_1 + X_2)/\sqrt{2} \in S_1^{n-1}(m)$.

Далее,

$$\|L_{(x_1+x_2)/\sqrt{2}}\|^2 =$$
$$= 1/2\{\|L_{x_1}\|^2 + \|L_{x_2}\|^2 + 2(L_{x_1}, L_{x_2})\}.$$

Наконец, так как (M, ρ_B) эйнштейново с константой Эйнштейна C, то из утверждения (1) теоремы следует, что

$\|L_{(x_1+x_2)/\sqrt{2}}\|^2 = \|L_{x_1}\|^2 = \|L_{x_2}\|^2 = 1/2 - C$,

и, значит, справедливо равенство $1/2 - C = 1/2\{2(1/2 - C) + 2(L_{x_1}, L_{x_2})\}$ или $(L_{x_1}, L_{x_2}) = 0$. Обратно, пусть $(L_{x_1}, L_{x_2}) = 0$. Заметим, что тогда $X_1 + X_2 \neq 0$, так как иначе $L_{x_1} = L_{x_2} = 0$, т.е. $X_1 * m = X_2 * m = 0$, – противоречие с простотой алгебры $(m,*)$. Значит, $\omega = \|X_1 + X_2\| \neq 0$. Опять имеем равенство

$$\left\|L_{(x_1=x_2)/\omega}\right\|^2 =$$
$$= \left(1/\omega^2\right)\left\{\left\|L_{x_1}\right\|^2 + \left\|L_{x_1}\right\|^2 + 2\left(L_{x_1}, L_{x_2}\right)\right\}$$

или, учитывая эйнштейновость многообразия (M, ρ_B) и то, что $\left(L_{x_1}, L_{x_2}\right) = 0$, эквивалентное ему равенство

$$1/2 - C = \left(2/\omega^2\right)\left(1/2 - C\right).$$

Отсюда следует, что $\omega^2 = 2$ и, значит, $(X_1, X_2) = 0$. Доказанное утверждение означает, что при отображении L, B – ортонормированный базис алгебры m переходит в ортогональную систему в алгебре голономии φ, кроме того,

$$\dim L(m) = \dim(m),$$
$$\dim L\left(S_1^{n-1}(m)\right) = \dim S_1^{n-1}(m).$$

Так как (M, ρ_B) эйнштейново с константой Эйнштейна C, то $\left\|L_x\right\|^2 = 1/2 - C$ для любого $X \in S_1^{n-1}(m)$, и, значит, $L\left(S_1^{n-1}(m)\right) \subset S_r^{\dim\varphi - 1}$, где $S_r^{\dim\varphi-1}$ – гиперсфера радиуса $r = \sqrt{1/2 - C}$ в алгебре голономии φ. Таким образом,

$L\left(S_1^{n-1}(m)\right) = L(m) \quad \bigcap S_r^{\dim\varphi-1} = S_r^{n-1}(\varphi)$ – большая сфера в алгебре голономии $\varphi = so(n)$. Справедливость обратного утверждения очевидна.

Пример 1.

Пусть $(G/H, \rho_B) = (K \times \ldots \times K / \Delta K, \rho_B)$ (где K – компактная простая группа Ли, произведение группы K берется n раз, а Δ – диагональное вложение) — пространство Леджера-Обаты со стандартной метрикой. Тогда, рассмотрев соответствующее редуктивное разложение $g = h \oplus m$, нетрудно получить, что $\left\|L_x\right\|^2 = 1/4 - 1/(2n)$ $\forall X \in m$.

Следовательно, $(K \times \ldots \times K / \Delta K, \rho_B)$ – многообразие Эйнштейна с константой $C = 1/4 + 1/(2n)$.

Пользуясь инвариантностью формы Киллинга простых компактных алгебр Ли и алгебр Мальцева, построим еще два примера однородных эйнштейновых многообразий.

Пример 2. Пусть $(m,*)$ — компактная простая алгебра Ли. Тогда

$$\mathrm{Der}(m,*) = \mathrm{Int}(m,*) \overset{\varphi}{\approx} (m,*),$$
где $\varphi : X \to adX$.

Положим $I(X,Y,Z) = (X*Y)*Z$ $\forall X,Y,Z \in m$. Тогда $(m,*,I)$ есть тройная алгебра Ли. Рассмотрим алгебру Номидзу, или стандартную обертывающую алгебру Ли для $L.t.a.$

$$(m,*,I): g = m \dot{+} \mathrm{Der}(m,*),$$
$$[X,Y] = X*Y + D(X,Y),$$
где $D(X,Y,Z) = I(X,Y,Z)$ $\forall X,Y,Z \in m$;
$$[D,X] = -[X,D] = D(X),$$
где $X \in m$, $D \in \mathrm{Der}(m,*)$;
$$[B,D] = BD - DB, \text{ где } B, D \in \mathrm{Der}(m,*).$$

Пусть G и H – компактные связные группы Ли алгебр g и $\mathrm{Der}(m,*)$, $H \subset G$. Полагая, что $(X,Y)_0 = -\mathrm{tr}\, adXadY$, имеем $([ZX],Y)_0 + ([Z,Y],X)_0 = 0$, $X,Y,Z \in m$.

Так как для $A \in \mathrm{Der}(m,*)$ найдется $Z_A \in m$ такой, что $A(X) = [Z_A, X]$ $\forall X \in m$, значит $(\cdot,\cdot)$ является $Ad(H)$ – инвариантным скалярным произведением на m. Более того, соответствующая G – инвариантная риманова метрика на G/H является естественно-редуктивной $(u(X,Y) = 0)$, а значит, согласно [9] имеем

$$R(X,Y)Z = (1/4)X*(Y*Z) - (1/4)Y*(X*Z) -$$
$$- (1/2)(X*Y)*Z - D(X,Y)Z$$
$$\forall X,Y,Z \in m.$$

Из этого факта и тождества Якоби имеем:

$$R(XY)Z = (5/4)Z*(X*Y) \quad \forall X,Y,Z \in m.$$
$$K_\sigma(X,Y) = (5/4)\|X*Y\| \text{ для } X,Y \in m,$$
$$(X,Y) = 0,\ \|X\|_0 = \|Y\|_0 = 1.$$
$$\mathrm{ric}(X) = 5/4 \text{ для } X \in m,\ \|X\|_0 = 1.$$

Пример 3. Аналогичная конструкция, примененная к простой алгебре Мальцева $C^7 = (m,*)$, дает изотропно неприводимое пространство $Spin(7)/G_2$.

Литература

1. Родионов Е.Д. Однородные римановы многообразия с метрикой Эйнштейна // Дис. … докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1994.
2. Сабинин Л.В. Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии // Основы дифференциальной геометрии / под ред. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Т. I. М., 1981.
3. Фляйшер А. Алгебры инвариантных псевдоримановых связностей на однородных пространствах // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1988. Вып. 803.
4. Sagle A. On anticommutative algebras and

homogeneous spaces // J. math. and mech., 1967. V. 16. ц 12.

5. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 28 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1988.
6. Мантуров О.В. Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. 1966. Т. 13.
7. Wang M., Ziller W. On normal homogeneous Einstein manifolds // Ann. sci. Ecole norm. super. 1985. V. 18.
8. Wolf J. The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces // Acta math., 1968.- V. 120.
9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. М., 1981.