

А.М. Сагалаков, А.Ю. Юдинцев

Генерация магнитного поля при потере устойчивости магнитогидродинамического течения в кольцевой трубе

Введение

В последнее время большое внимание уделяется изучению вторичных несимметричных автоколебательных режимов, развивающихся после потери устойчивости стационарных симметричных течений. Такие режимы течения изучались в работах [1-3], в которых была обнаружена возможность спонтанного возникновения вращения. В работе [2] исследовано появление автоколебаний МГД-течения в плоскопараллельном канале при продольном магнитном поле, которые сопровождаются спонтанным возникновением поперечного к градиенту давления среднего течения. Аналогичный трехмерный несимметричный режим, отвечающий от МГД-течения в трубе кольцевого сечения, исследован в [3] в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса.

В данной работе решается полностью самосогласованная задача о ветвлении трехмерных автоколебаний МГД течения жидкости произвольной проводимости в канале кольцевого сечения в продольном магнитном поле.

Уравнения для возмущений основного течения

Рассмотрим МГД течение несжимаемой вязкой жидкости конечной проводимости между коаксиальными идеально проводящими цилиндрами с радиусами ξ и $\xi+1$ соответственно. Будем использовать безразмерную форму записи. В качестве масштаба длины выберем ширину зазора, масштаба скорости — среднерасходную скорость, масштабом поля — величину внешнего магнитного поля. Аксиальную ось цилиндрической системы координат направим по оси цилиндра вдоль потока. Внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0 = (0,0,1)$ параллельно основному стационарному течению $\mathbf{V} = (0,0,U(r))$. Здесь

$$U(r) = Ar^2 - B \ln(r) + D, \quad (1)$$

где величины

$$A = \frac{2 \ln(1+1/\xi)}{(1+2\xi - (1+2\xi+2\xi^2) \ln(\xi+1/\xi))};$$

$$B = A(2\xi+1)/\ln(1+1/\xi);$$

$$D = B \ln(\xi) - A\xi^2$$

определены из условий прилипания жидкости на стенках и равенства единице среднерасходной скорости. Представим скорость, давление и поле в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}(r, \varphi, z - Ct)/\text{Re};$$

$$P = P_0 + p(r, \varphi, z - Ct)/\text{Re}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(r, \varphi, z - Ct),$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w), p, \mathbf{h} = \mathbf{b}/\text{Pm} = (f, g, h)$ — возмущения скорости, давления и магнитного поля соответственно (C — скорость распространения возмущений). Подставив (2) в систему уравнений магнитной гидродинамики в случае конечной проводимости, получим нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta \mathbf{v} - \text{Re}_0 \left[(U - C) \partial \mathbf{v} / \partial z + \mathbf{e}_z \frac{dU}{dr} u + \nabla p \right] +$$

$$+ \text{Ha}^2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \text{Ha}^2 \text{Pm} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h};$$

$$\Delta \mathbf{h} - \text{Pm} \text{Re}_0 \left[(U - C) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{dU}{dr} f \right] + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} =$$

$$= \text{Pm} \{ (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{h} - (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{v} \};$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

описывающую поведение возмущений. Здесь \mathbf{e}_z орт оси Oz ; $\{u, f\}$ — компоненты возмущений скорости и поля соответственно, Ha — число Гартмана, $\text{Pm} = \text{Rm}/\text{Re}$ — магнитное число Прандтля.

Уравнения автоколебаний МГД-течения

В соответствии с методом Ляпунова-Шмидта представим возмущения основного течения вблизи нейтральной поверхности линейной теории при $\text{Re} = \text{Re}_0 + \varepsilon^2 s, (s = \pm 1)$ в виде разложения в ряды по малому параметру надкритичности ε

$$\text{Re}C = \text{Re}_0 C_0 + \text{Re}_0 (\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots);$$

$$\{v, p, h\} = \varepsilon \{v_1, p_1, h_1\} + \varepsilon^2 \{v_2, p_2, h_2\} + \dots,$$

где Re_0, C_0 — значения параметров на нейтральной поверхности. Используя разложения (4), преобразуем нелинейную систему МГД уравнений для возмущений (3) в рекуррентную систему линейных неоднородных уравнений. Для этого подставим (4) в (3) и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим:

$$\Delta \mathbf{v}_k - \text{Re}_0 \left[(U - C_0) \frac{\partial \cdot \mathbf{v}_k}{\partial \cdot z} + \mathbf{e}_z \frac{dU}{dr} u_k + \nabla p_k \right] +$$

$$+ \text{Ha}^2 \partial \cdot \mathbf{h}_k / \partial \cdot z = \mathbf{F}_k;$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{h}_k - \text{PmRe}_0 \left[(U - C_0) \frac{\partial \cdot \mathbf{h}_k}{\partial \cdot z} + \mathbf{e}_z \frac{dU}{dr} f_k \right] + \\ + \partial \cdot \mathbf{v}_k / \partial \cdot z = \mathbf{G}_k; \\ \nabla \mathbf{v}_k = 0; k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где правые части $\mathbf{F}_k, \mathbf{G}_k$ — зависят квадратичным образом от функций предыдущих приближений. Решения (5) в первом и втором приближениях представляются в виде:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}_1, p_1, \mathbf{h}_1\} = A_{11} \mathbf{a}_{11} e_{11} + A_{1,-1} \mathbf{a}_{1,-1} e_{1,-1} + k.c., \\ \{\mathbf{v}_2, p_2, \mathbf{h}_2\} = / A_{11} / a_{00} + / A_{1,-1} / a_{0,-0} + A_{11}^2 \mathbf{a}_{1,1} e_{22} + \\ + A_{1,-1}^2 \mathbf{a}_{2,-2} e_{2,-2} + A_{11} A_{1,-1} \mathbf{a}_{20} + \\ + A_{11} A_{1,-1}^* \mathbf{a}_{02} e_{02} + k.c. \end{aligned}$$

Здесь вектор $\mathbf{a}_{kl}(r) = \{u_{kl}(r), v_{kl}(r), w_{kl}(r), p_{kl}(r), f_{kl}(r), g_{kl}(r), h_{kl}(r)\}$ составлен из компонент возмущений скорости $\mathbf{v}_{kl}(r) = \{u_{kl}(r), v_{kl}(r), w_{kl}(r)\}$, возмущений давления $p_{kl}(r)$ и компонент магнитного поля $\mathbf{h}_{kl}(r) = \{f_{kl}(r), g_{kl}(r), h_{kl}(r)\}$; $e_{kl}(\varphi, z) = \exp(i\alpha k z + iml\varphi)$; буквами *k.c.* обозначены комплексно-сопряженные периодические слагаемые; $A_{11}, A_{1,-1}$ — комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

Для определения параметров отвечающего автоколебательного режима необходимо найти, по крайней мере, решения первого и второго приближений системы (5). Учитывая свойства симметрии векторов \mathbf{a}_{kl} :

$$\begin{aligned} \{u_{kl}, v_{kl}, w_{kl}, p_{kl}, f_{kl}, g_{kl}, h_{kl}\} = \\ = \{u_{k,-l}, -v_{k,-l}, w_{k,-l}, p_{k,-l}, f_{k,-l}, -g_{k,-l}, h_{k,-l}\}, \end{aligned}$$

можно ограничиться определением лишь пяти вектор-функций $\mathbf{a}_{00}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{02}, \mathbf{a}_{11}$, которые находятся из следующих рекуррентных систем обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{kl} u_{kl} + i\alpha k \text{Ha}^2 f_{kl} - 2imlr^{-2} v_{kl} - \\ - \text{Re}_0 p'_{kl} = F_{kl}^{(1)}; \\ L_{kl} v_{kl} + i\alpha k \text{Ha}^2 g_{kl} + 2imlr^{-2} u_{kl} - \\ - imlr^{-1} \text{Re}_0 p_{kl} = F_{kl}^{(2)}; \\ L_{kl} w_{kl} + i\alpha k \text{Ha}^2 h_{kl} + w_{kl} r^{-2} - U'(r) \text{Re}_0 u_{kl} - \\ - i\alpha k \text{Re}_0 p_{kl} = F_{kl}^{(3)}; \\ N_{kl} f_{kl} + i\alpha k u_{kl} - 2imlr^{-2} g_{kl} = G_{kl}^{(1)}; \\ N_{kl} g_{kl} + i\alpha k v_{kl} + 2imlr^{-2} f_{kl} = G_{kl}^{(2)}; \\ N_{kl} h_{kl} + i\alpha k w_{kl} + h_{kl} r^{-2} - \\ - \text{PmRe}_0 U'(r) f_{kl} = G_{kl}^{(3)} \\ (ru'_{kl})' + imlv_{kl} + i\alpha k r w_{kl} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r , a

$$\begin{aligned} M_{kl} \equiv \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r - \frac{(ml)^2}{r^2} - (k\alpha)^2, \\ L_{kl} \equiv M_{kl} - i\alpha k \text{Re}_0 (U - C_0), \\ N_{kl} \equiv M_{kl} - i\alpha k \text{Re}_0 \text{Pm} (U - C_0). \end{aligned}$$

Правые части имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} \equiv (F_{11}^{(1)}, F_{11}^{(2)}, F_{11}^{(3)}) = (0, 0, 0); \\ \mathbf{G}_{11} \equiv (G_{11}^{(1)}, G_{11}^{(2)}, G_{11}^{(3)}) = (0, 0, 0); \\ \mathbf{F}_{00} = 2\Re \left\{ \mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{v}_{11}^* - \text{PmHa}^2 \mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{h}_{11}^* \right\}; \\ \mathbf{G}_{00} = 2\Re \left\{ \mathbf{v}_{11}^* \oplus \mathbf{v}_{11} - \mathbf{h}_{11}^* \oplus \mathbf{h}_{11} \right\}; \\ \mathbf{F}_{22} = \mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{v}_{11} - \text{PmHa}^2 \mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{h}_{11}; \\ \mathbf{G}_{22} = \text{Pm}(\mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{h}_{11} - \mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{v}_{11}); \\ \mathbf{F}_{20} = \mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{v}_{1,-1} + \mathbf{v}_{1,-1} \oplus \mathbf{v}_{11} - \\ - \text{PmHa}^2 (\mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{h}_{1,-1} + \mathbf{h}_{1,-1} \oplus \mathbf{h}_{11}); \\ \mathbf{G}_{20} = \text{Pm}(\mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{h}_{1,-1} + \mathbf{v}_{1,-1} \oplus \mathbf{h}_{11} - \\ - \mathbf{h}_{1,-1} \oplus \mathbf{v}_{11} - \mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{v}_{1,-1}); \\ \mathbf{F}_{02} = \mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{v}_{1,-1}^* + \mathbf{v}_{1,-1}^* \oplus \mathbf{v}_{11} - \\ - \text{PmHa}^2 (\mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{h}_{1,-1}^* + \mathbf{h}_{1,-1}^* \oplus \mathbf{h}_{11}); \\ \mathbf{G}_{02} = \text{Pm}(\mathbf{v}_{11} \oplus \mathbf{h}_{1,-1}^* + \mathbf{v}_{1,-1}^* \oplus \mathbf{h}_{11} - \\ - \mathbf{h}_{1,-1}^* \oplus \mathbf{v}_{11} - \mathbf{h}_{11} \oplus \mathbf{v}_{1,-1}^*). \end{aligned}$$

Здесь символом \oplus обозначена операция

$$\mathbf{v}_{nm} \oplus \mathbf{h}_{kl} = [(\mathbf{v}_{nm} e_{nm} \nabla) \mathbf{h}_{kl} e_{kl}] / e_{n+k, m+l}.$$

Условия прилипания жидкости на стенках канала и идеальной проводимости стенок приводят к следующим граничным условиям для компонент скорости и поля системы (6):

$$\begin{aligned} \{u_{nm}, v_{nm}, w_{nm}, f_{nm}, (rg_{nm})', h'_{nm}\} = 0, \\ \text{при } r = \xi, \xi + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения разветвления, из которых определяются амплитуды $A_{11}, A_{1,-1}$, поправка к фазовой скорости C_2 и характер ветвления S автоколебаний, получаем из условия разрешимости системы (5) при $k=3$. В результате имеем уравнения разветвления для случая кратного спектра ($m \neq 0$) [1...3]

$$\begin{aligned} A_{11} (S_1 + / A_{11} / I_2 + / A_{1,-1} / I_4 - i\alpha \text{Re}_0 C_2 I_3) = 0; \\ A_{1,-1} (S_1 + / A_{1,-1} / I_2 + / A_{11} / I_4 - i\alpha \text{Re}_0 C_2 I_3) = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

Комплексные коэффициенты I_1, I_2, I_3, I_4 представляют собой квадратуры от собственных функций первого и второго приближений.

Система (8) имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} A_{11} (A_{1,-1}) = 0; / A_{1,-1} / (A_{11} / I_2) = \gamma; \\ \gamma^2 = -s \Re \left\{ I_1 I_3^* \right\} / \Re \left\{ I_2 I_3^* \right\}; \\ \alpha \text{Re}_0 C_2 = s \Im \left\{ I_3 I_2^* \right\} / \Re \left\{ I_3 I_2^* \right\}; \\ / A_{11} / I_2 = / A_{1,-1} / I_2 = \delta^2 \equiv -s \Re \left\{ I_1 I_3^* \right\} / \Re \left\{ (I_2 + I_4) I_3^* \right\}; \\ \alpha \text{Re}_0 C_2 = s \Im \left\{ I_1 (I_2^* + I_3^*) \right\} / \Re \left\{ I_3 (I_2^* + I_4^*) \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$(10)$$

Знак s выбирается так, чтобы квадраты модулей амплитуд были положительными и указывает на закритический ($s > 0$) или докритический ($s < 0$) характер ветвления автоколебаний. Решение (9) соответствует возникновению вторичного режима типа спиральной волны. Решение (10) определяет осесимметричные автоколебания, распространяющиеся в продольном направлении. Устойчивость вторичных режимов определяется знаком соотношения $2\delta^2 - \gamma^2$. Когда оба режима ветвятся в закритическую область, при $2\delta^2 < \gamma^2$ устойчиво спиральное решение, а при $2\delta^2 > \gamma^2$ — осесимметричное. Таким образом, устойчиво решение с большей энергией пульсаций. Если же хотя бы один из вторичных режимов имеет докритический характер ветвления, то оба они являются неустойчивыми.

Деформация исходного профиля скорости и возникновение закрученного течения

Установившееся вторичное автоколебательное течение типа спиральных волн содержит наряду с осцилляторными модами стационарные компоненты — деформации начального ламинарного профиля скорости жидкости и магнитного поля. Отметим, что в приближении слабой проводимости жидкости, $\text{Rm} \ll 1$ стационарных поправок для поля не возникает.

Из уравнения неразрывности для жидкости и магнитного поля, граничных условий следует, что радиальные компоненты стационарных поправок для скорости $u_{00}(r)$ и поля $f_{00}(r)$ равны нулю. Отличная от нуля осевая компонента $w_{00}(r)$ представляет собой деформацию исходного профиля, а наличие азимутальной компоненты $v_{00}(r)$ свидетельствует о возможности появления осредненного вращения. Уравнения для $v_{00}(r), w_{00}(r)$ легко интегрируются. В результате получаем:

$$v_{00}(r) = \frac{(\xi+1)^2(\xi^2 - r^2)}{(2\xi+1)r} + \int_{\xi}^{\xi+1} 2\Re(u_{11}^* v_{11} / r - \text{PmHa}^2 f_{11} g_{11}^* / r) dr + r \int_{\xi}^r 2\Re(u_{11}^* v_{11} / r - \text{PmHa}^2 f_{11} g_{11}^* / r) dr;$$

$$w_{00}(r) = -\frac{\ln(r/\xi)}{\ln(1+1/\xi)} + \int_{\xi}^{\xi+1} 2\Re(u_{11}^* w_{11} / r - \text{PmHa}^2 f_{11} h_{11}^* / r) dr + \int_{\xi}^r 2\Re(u_{11}^* w_{11} / r - \text{PmHa}^2 f_{11} h_{11}^* / r) dr.$$

Стационарная поправка $w_q(r)$, соответ-

ствующая случаю возникновения автоколебаний при постоянном расходе жидкости, определяется через профиль основного течения и стационарную поправку для случая фиксированного градиента давления

$$w_q(r) = w_{00}(r) - U(r) \int_{\xi}^{\xi+1} w_{00}(r) r dr / \int_{\xi}^{\xi+1} U(r) r dr.$$

В установившемся автоколебательном режиме типа спиральной волны имеет место осредненное вращательное течение с ненулевым моментом импульса. Потоки момента на стенке канала ненулевые в отличие от плоскопараллельного течения [2]. При этом одна стенка излучает, а другая поглощает равное количество момента импульса и, в соответствии с законом сохранения момента импульса, общее количество момента остается постоянным. Распределение азимутальной скорости поддерживается напряжениями Рейнольдса (квадратичное по скорости слагаемое в правой части) и пондеромоторными напряжениями (квадратичное по полю слагаемое).

Генерация стационарных магнитных полей

Рассмотрим стационарные поправки второго приближения для магнитного поля $g_{00}(r)$ и $h_{00}(r)$. Они определяются из следующих задач:

$$\left[\frac{1}{r} (g_{00}(r))' \right]' = 2\text{Pm}\Re \{ u_{11} g_{11}^* - f_{11} v_{11}^* \}$$

$$\xi < r < \xi + 1, (r g_{00}(r))' = 0$$

при $r = \xi, r = \xi + 1;$ (11)

$$\text{и } \left(h_{00}' r \right)' = 2\text{Pm}\Re \{ u_{11} g_{11}^* - f_{11} v_{11}^* \}$$

$$\xi < r < \xi + 1, h_{00}'(r) = 0$$

при $r = \xi, r = \xi + 1;$ (12)

Краевые задачи (11) и (12) определяют функции $h_{00}(r)$ и $g_{00}(r)$ только с точностью до произвольных слагаемых вида $\{\text{const}\}$ и $\{\text{const}/r\}$ соответственно. Эти слагаемые возникают из-за выбранной электродинамической постановки задачи — условий абсолютной проводимости стенок и представляют собой разрывы тангенциальных компонент магнитного поля, связанные с поверхностными токами. Кроме того, краевые условия в виде равенства нулю производных на границах интегрирования налагают ограничение на возможный вид правой части (решение таких задач существует только в том случае, если интеграл от правой части в пределах от ξ до $\xi+1$ равен нулю). Как легко видеть, правые части представляются в виде производных от функций, которые равны нулю на границах интегрирования и, очевидно, удовлетворяют краевым условиям.

Таким образом, для определения стационарных поправок магнитной индукции недостаточно условий идеальной проводимости стенок.

Доопределить задачу можно с помощью введения дополнительных условий для поля. например, потребуем сохранения потока магнитной индукции в продольном и азимутальном направлениях. Тогда для $g_{00}(r)$, $h_{00}(r)$ получим недостающие условия в виде $\int_{\xi}^{\xi+1} h_{00}(r)r dr = 0$ (сохранение потока магнитной индукции через поперечное сечение канала) и $\int_{\xi}^{\xi+1} g_{00}(r) dr = 0$ (сохранение потока в азимутальном направлении).

Генерация стационарных компонент поля приводит к появлению соответствующих компонент стационарных токов. Используя уравнения (11), (12), легко получить для азимутального тока $j_{\varphi}(r) = -1/r \partial/\partial r h_{00}(r)$ уравнение

$$\begin{aligned} (r^2 j_{\varphi}(r))' &= -2\text{Pm} \Re \left\{ r (u_{11} h_{11}^* - f_{11} w_{11}^*) \right\}, \\ j_{\varphi}(\xi) &= j_{\varphi}(\xi+1) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

для продольного тока $j_z(r) = -1/r \partial/\partial r g_{00}(r)$ уравнение

$$\begin{aligned} j_z(r)' &= 2\text{Pm} \Re \left\{ u_{11} g_{11}^* - f_{11} v_{11}^* \right\}, \\ j_z(\xi) &= j_z(\xi+1) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

Проинтегрировав (13), (14) с учетом равенства нулю первообразной от правых частей при $r = \xi$, $r = \xi + 1$ получаем явный вид для стационарных токов, индуцируемых в результате нелинейных эффектов:

$$\begin{aligned} j_{\varphi}(r) &= -2\text{Pm} \Re (u_{11} h_{11}^* - f_{11} w_{11}^*) / r, \\ j_z(r) &= 2\text{Pm} \Re \{ u_{11} g_{11}^* - f_{11} v_{11}^* \} \end{aligned}$$

Численные расчеты и анализ результатов

При проведении численных расчетов значение магнитного числа Прандтля было выбрано $\text{Pm} = 0,001$. Для канала кольцевого сечения с $\xi = 10$, $\text{Pm} = 0,001$ трехмерные моды возбуждаются раньше осесимметричных при $\text{Ha} \geq 167,5$. Так, например, устойчивый трехмерный автоколебательный режим типа спиральной волны осуществляется при $\text{Ha} = 168$ вблизи носика нейтральной кривой $\alpha = 1,73002$, $C = 0,27866$, $\text{Re} = 30822$, $m = 3$. При увеличении поля до величины, соответствующей $\text{Ha} = 170,5$, устойчивым является осесимметричный режим (с критическими параметрами по линейной теории: $\alpha = 1,72668$, $C = 0,277628$, $\text{Re} = 31265$, $m = 3$).

Таким образом, учет конечной проводимости жидкости при установлении автоколебаний приводит наряду с возникновением стационарных добавок скорости к генерации стационарного магнитного поля с ненулевой азимутальной компонентой и возбуждению соответствующих стационарных токов. Бифуркация такого вторичного режима в результате потери устойчивости ламинарного МГД течения в трубе кольцевого сечения при наличии внешнего продольного магнитного поля может служить интересным примером динамического МГД динамо.

Литература

1. Гольдштик М.А., Жданова Е.М., Штерн В.Н. Возникновение вращательного движения в результате гидродинамической неустойчивости // Изв.АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. N 5. С. 50-55.
2. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Устойчивость трехмерных автоколебаний плоскопараллельных потоков электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1991. N 4. С. 15-20.
3. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Автоколебания магнитогидродинамических течений в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1992. N 1. С. 7-12.