УДК 512

С.Д. Козлов, С.В. Дронов

О порождающих σ-классов и π-классов

Работа посвящена вопросам сохранения и видоизменения АЕ-свойств при переходе от σ или π-класса к цепочкам их теоретико-множественных порождающих.

Мы работаем в альтернативной теории множеств, обстоятельное изложение которой можно найти в (1). В тексте работы мы будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в (1). Класс конечных натуральных чисел будем обозначать **FN**. Латинскими строчными буквами будем обозначать элементы **FN**, буквы x,y,z (возможно, с индексами) использовать в качестве переменных для множеств.

Если класс X определяется теоретико-множественной формулой, то будем называть его sd-классом. Если найдется последовательность sd-классов X_i, $i\in$ **FN** таких, что

$$X=\bigcap\{x_i \mid i\in \mathrm{FN}\}, Y=\bigcup\{x_i \mid i\in \mathrm{FN}\},$$

то X называется π-классом, а Y — σ-классом. Такие sd-классы условимся называть порождающими для X, Y. Если для каждого i $X_i\subset X_{i+1}$, то последовательность порождающих назовем возрастающей цепочкой, если же для каждого i $X_i\supset X_{i+1}$, то убывающей цепочкой. Всюду ниже без ограничения общности будем считать, что порождающие σ-класса образуют возрастающую цепочку, а порождающие π-класса — убывающую. Класс X называется раскрытым, если любой его счетный подкласс содержится в некотором подмножестве X. Известно, что любой π-класс является раскрытым, и счетное пересечение раскрытых (а значит, и sd-) классов раскрыто (1).

Настоящая работа посвящена возможности построения удовлетворяющих $\forall\exists$-формулам цепочек порождающих σ- и π-классов. Из результатов данной работы, в частности, вытекает, что такие цепочки можно выбрать как подцепочки произвольной цепочки порождающих.

Теорема 1. *Пусть* X — *π-класс,* $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_k)$ $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — *теоретико-множественная формула. Тогда класс* X *удовлетворяет свойству*

$$(\forall\mathbf{x}\in X^n)(\exists\mathbf{y}\in X^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

в том и только том случае, когда существует убывающая цепочка порождающих X_i, $i\in$ **FN**, *для которой выполнено*

$$(\forall i>1)(\forall\mathbf{x}\in X_i^n)(\exists\mathbf{y}\in X_{i-1}^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ***Достаточность***. Возьмем произвольную n-ку $\boldsymbol{x}\in X^n$ и рассмотрим sd-класс $Y=\{\mathbf{y} \mid \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$. Так как

$$(\forall i>1)(\forall\mathbf{x}\in X_i^n)(\exists\mathbf{y}_i\in X_{i-1}^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}_i)),$$

то

$$(\forall i)(Z_i\equiv X_i^k\cap Y\neq\varnothing).$$

Поскольку последовательность классов Z_i не возрастает, то

$$(\forall m)(\bigcap\{Z_i \mid i\le m\}=Z_m\neq\varnothing,$$

откуда по теореме о счетном пересечении раскрытых классов [1, глава II, раздел 4] имеем

$$\bigcap\{Z_i \mid i\in \mathrm{FN}\}=Y\bigcap\left(\bigcap\{X_i^k \mid i\in \mathrm{FN}\}\right)\neq\varnothing.$$

Таким образом, в этом пересечении найдется элемент $\boldsymbol{y}$. Он содержится во всех X_i^k (а значит, и в X^k), и выполняется $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть Z_i, $i\in$ **FN** — некоторая убывающая цепочка порождающих. Покажем, что

$$(\forall i)(\exists j>i)(\forall\mathbf{x}\in Z_j^n)(\exists\mathbf{y}\in Z_i^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})). \quad (1)$$

Предположим, напротив, что

$$(\exists i)(\forall j>i)(\exists\mathbf{x}\in Z_j^n)(\forall\mathbf{y}\in Z_i^k)(\neg\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

и рассмотрим sd-класс

$$Y_i=\{\mathbf{x} \mid (\forall\mathbf{y}\in Z_i^k)(\neg\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\}$$

Очевидно, что $(\forall j>i)((Y_i\cap Z_j^n)\neq\varnothing)$. Так как $U_j\equiv Y_i\cap Z_j^n, j\in \mathrm{FN}$ — убывающая цепочка непустых sd-классов, то по той же теореме из [1]

$$Y_i\bigcap\left(\bigcap\{Z_j^n \mid j\in \mathrm{FN}\}\right)=\bigcap\{U_j \mid j\in \mathrm{FN}\}\neq\varnothing.$$

Отсюда $(\exists\mathbf{x}\in X^n)(\forall\mathbf{y}\in Z^k)(\neg\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))$.

В частности, так как $X\subset Z_i$, то $(\exists\mathbf{x}\in X^n)(\forall\mathbf{y}\in X^k)(\neg\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. Полученное противоречие доказывает (1). Свойство (1) позволяет по убывающей цепочке порождающих Z_i, $i\in$ **FN** шаг за шагом построить требуемую убывающую цепочку X_i, $i\in$ **FN**. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* X — *σ-класс,* $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_k)$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — *теоретико-множественная формула. Тогда класс* X *удовлетворяет свойству*

$$(\forall\mathbf{x}\in X^n)(\exists\mathbf{y}\in X^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

в том и только том случае, когда существует возрастающая цепочка порождающих X_i, $i\in$ **FN**, *для которой выполнено*

$$(\forall i)(\forall\mathbf{x}\in X_i^n)(\exists\mathbf{y}\in X_{i+1}^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ***Достаточность*** очевидна. Докажем ***необходимость***. Пусть Z_i, $i\in$ **FN** — некоторая возрастающая цепочка порождающих. Покажем, что

$$(\forall i)(\exists j>i)(\forall\mathbf{x}\in Z_i^n)(\exists\mathbf{y}\in Z_j^n)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})). \quad (2)$$

для чего предположим противное:

$$(\exists i)(\forall j>i)(\exists \mathbf{x}'\in Z_i^n)(\forall \mathbf{y}\in Z_j^k)(\neg\varphi(\mathbf{x}',\mathbf{y})).$$

Отсюда следует, что

$$X^k=\bigcup\{Z_j^k \mid j>i\}\subseteq\{y \mid \neg\varphi(\mathbf{x}',\mathbf{y})\},$$

то есть в X^k не найдется ни одного $\boldsymbol{y}$, для которого $\varphi(\mathbf{x}',\mathbf{y})$. Полученное противоречие доказывает (2), откуда, шаг за шагом, можно построить требуемую цепочку порождающих X_i, $i\in\mathbf{FN}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Вообще говоря, нельзя утверждать, что в условиях теорем можно выбрать цепочку порождающих с требуемым свойством без сдвига индексов. Например, пусть $X=\mathbf{FN}$. Справедлива формула

$$(\forall x\in X)(\exists y\in X)(y>x),$$

но в цепочке порождающих $X_n=n$ ни для какого n не выполнено

$$(\forall x\in X_n)(\exists y\in X_n)(y>x).$$

Более того, выполнение последней формулы означает, что X_n не может являться множеством, а поэтому построение цепочки порождающих для **FN** с этим свойством в принципе невозможно.

Замечание 2. В условиях теорем, если класс X удовлетворяет свойству

$$(\exists \mathbf{x}\in X^n)(\forall \mathbf{y}\in X^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})), \qquad (3)$$

то существует возрастающая (или, соответственно, убывающая) цепочка порождающих X_i, $i\in\mathbf{FN}$, для которой выполнено

$$(\forall i)(\exists \mathbf{x}\in X_i^n)(\forall \mathbf{y}\in X_i^k)(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})). \qquad (4)$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, что показывают следующие примеры.

1. Пусть $X=\mathbf{N}\backslash\mathbf{FN}$, $X_i=\mathbf{N}\backslash i$, $i\in\mathbf{FN}$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x}\le\mathbf{y})$. Хотя в каждом X_i есть минимальный элемент (формула (4)), но в $\mathbf{N}\backslash\mathbf{FN}$ минимального элемента нет (а формула (3) утверждает его существование).

2. Аналогично положим $X=\mathbf{FN}$, $X_i=i$, $i\in\mathbf{FN}$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x}\le\mathbf{y})$. Здесь контрпример связан с отсутствием максимального элемента в **FN**.

Следствие. Пусть X — π-класс (соответственно σ-класс), $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула. Тогда класс X удовлетворяет свойству $(\forall \mathbf{x}\in X^n)(\varphi(\mathbf{x}))$, тогда и только тогда, когда существует убывающая (соответственно возрастающая) цепочка порождающих X_i, $i\in\mathbf{FN}$ такая, что

$$(\forall i)(\forall \mathbf{x}\in X_i^n)(\varphi(\mathbf{x})).$$

Литература

1. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир, 1983. 150 с.