УДК 514.752

М.А. Чешкова

К геометрии n-поверхностей в евклидовом пространстве E^{n+m}

В евклидовом пространстве E^{n+m} рассматриваются две гладкие n-поверхности M, $\overline{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \overline{M}$. Исследуются случаи, когда главные нормали поверхности $\overline{M}$:

1) параллельны касательным плоскостям к M;
2) ортогональны касательным плоскостям к M.

Пусть M, $\overline{M}$ — две гладкие n-поверхности в евклидовом пространстве E^{n+m}, $f: M \to \overline{M}$ — диффеоморфизм, $F(M)$—R—алгебра дифференцируемых на M функций, T_s^q —F—модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s), ∂ — дифференцирование в E^{n+m}.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид ([1], стр. 23)

$$\begin{aligned}\partial_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y),\\ \partial_X \xi &= -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi,\end{aligned} \qquad (1)$$

где $X, Y \in T_0^1(M), \nabla$ — связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y)=<X,Y>$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+m}, α — вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^\perp$ — нормальная связность, $A_\xi \in T_1^1(M)$ — оператор Вейнгартена, соответствующий полю $\xi \in TM^\perp$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,\\ R^\perp(X,Y)\xi &= \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(Y, A_\xi X),\\ (\nabla_X A_\xi)(Y) - (\nabla_Y A_\xi)(X) &= A_{\nabla^\perp_X \xi}Y - A_{\nabla^\perp_Y \xi}X,\\ (D_X\alpha)(Y,Z) &= (D_Y\alpha)(X,Z),\end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

— кривизна связности ∇,

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$$

— кривизна нормальной связности $\nabla^\perp$,

$$(\nabla_X A_\xi)(Y) = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi(\nabla_X Y)$$

— ковариантная производная поля A_ξ в связности ∇,

$$(D_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

— ковариантная производная поля α в связности $\nabla^\perp \oplus \nabla$.

Обозначим через r — радиус вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ — радиус вектор точки $f(p) \in \overline{M}$, через a — вектор $p\vec{f}(p)$.

Тогда отображение $f: M \to \overline{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = r - a. \qquad (3)$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r},$$
$$X \in TM.$$

Положим $a = u + r$, $U \in TM$, $r \in TM^\perp$. Дифференцируя (3) и используя (1), получим

$$df(X) = FX + \Omega X, \qquad (4)$$

где

$$FX = X - A_r X + \nabla_X U, \qquad (5)$$
$$\Omega X = \alpha(X,U) + \nabla^\perp_X r,$$
$$FX \in TM, \quad \Omega X \in TM^\perp.$$

Отображение f индуцирует на M метрику

$$\bar{g}(X,Y) = <df(X), df(Y)> = <FX, FY> + <\Omega X, \Omega Y>. \qquad (6)$$

Обозначим через N векторное расслоение над M, слой которого $E_p = Tf(p)\overline{M}^\perp$. Пусть $\bar\nabla$ — связность на M, удовлетворяющая условию

$$(\partial_X df(Y))_p - (df(\bar\nabla_X Y))_p = \bar\alpha(X,Y)_p \in E_p. \qquad (7)$$

Лемма 1. *Связность $\bar\nabla$ есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$, а векторнозначная билинейная форма $\bar\alpha$ — симметричная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Z\bar{g}(X,Y) = <\partial_Z dfX, dfY> + <dfX, \partial_Z dfY> =$$
$$= <df\bar\nabla_Z X + \bar\alpha(Z,X), dfY> + <dfX, df\bar\nabla_Z Y + \bar\alpha(Z,Y)>.$$

Откуда

$$Z\bar{g}(X,Y) = \bar{g}(\bar\nabla_Z X, Y) + \bar{g}(X, \bar\nabla_Z Y),$$

т.е. связность $\bar\nabla$ согласована с метрикой $\bar{g}$. Так как

$$\partial_X dfY + \partial_X \partial_Y \bar{r}$$

и

$$\partial_X\partial_Y \bar{r} - \partial_Y\partial_X \bar{r} - \partial_{X,Y}\bar{r} = 0,$$

то получим

$$df\bar\nabla_X Y - df\bar\nabla_Y X - df[X,Y] + \bar\alpha(X,Y) - \bar\alpha(Y,X) = 0.$$

Приравнивая нулю касательные и нормальные составляющие к $\overline{M}$, получим

$$df(\bar\nabla_X Y - \bar\nabla_Y X - [X,Y]) = 0,$$
$$\bar\alpha(X,Y) - \bar\alpha(Y,X) = 0.$$

Так как f — диффеоморфизм, то

$$\bar\nabla_X Y - \bar\nabla_Y X - [X,Y] = 0,$$
$$\bar\alpha(X,Y) - \bar\alpha(Y,X) = 0,$$

т.е. кручение связности $\bar\nabla$ равно нулю. Следовательно, $\bar\nabla$ — есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$, а билинейная форма $\bar\alpha$ — симметричная.

Для $\forall p \in M$ разложим $\bar\alpha(X,Y)_p$ на касательную $\alpha(X,Y)_p^{\mathsf{T}}$ и нормальную $\alpha(X,Y)_p^{\perp}$ составляющие к поверхности M.

Лемма 2. *Имеют место соотношения*

$$\alpha(X,Y)_p^{\mathsf{T}} = (\overline{D}_X F)(Y) - A_{\Omega Y} X, \qquad (8)$$

$$\alpha(X,Y)_p^{\perp} = (D_X^{\perp}\Omega)(Y) + \alpha(X,FY),$$

где $(\overline{D}_X F)(Y) = \nabla_X FY - F\nabla_X Y$ *— ковариантная производная поля* F *в связности* $\nabla \oplus \nabla$, *а* $(D_X^{\perp}\Omega)(Y) = \nabla_X^{\perp}\Omega Y - \Omega\nabla_X Y$ *— ковариантная производная* Ω *в связности.* $\nabla^{\perp} \oplus \nabla$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1),(5),(7) имеем

$$\alpha(X,Y) = \partial_X(FY + \Omega Y) - F\nabla_X Y - \Omega\nabla_X Y =$$
$$= \nabla_X FY + \alpha(X,FY) - A_{\Omega Y}X +$$
$$+ \nabla_X^{\perp}\Omega Y - F\nabla_X Y - \Omega\nabla_X Y =$$
$$= \alpha(X,Y)^{\mathsf{T}} + \alpha(X,Y)^{\perp}.$$

Приравнивая касательные и нормальные компоненты, получим (8).

Рассмотрим векторное пространство, определяемое векторами $\alpha(X,Y)_p$ — главная нормаль поверхности $\overline{M}$ в точке $q=f(p)$.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *главные нормали поверхности* $\overline{M}$ *параллельны нормальным пространствам к* M *в соответствующих точках;*

2) $(\overline{D}_X F)(Y) = A_{\Omega Y} X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует, что

$$\alpha(X,Y)^{\mathsf{T}} = 0 \Leftrightarrow (\overline{D}_X F)(Y) = A_{\Omega Y} X.$$

Теорема 2. *Если главные нормали поверхности* $\overline{M}$ *параллельны нормальным пространствам к* M *в соответствующих точках, то тензоры кривизны* R, $\overline{R}$ *связностей* ∇, ∇ *удовлетворяют соотношениям*

$$R(X,Y)FZ = F\overline{R}(X,Y)Z =$$
$$= A_{(D_X^{\perp}\Omega)(Y)}Z - A_{(D_Y^{\perp}\Omega)(X)}Z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 имеем

$$\nabla_Y FZ = F\nabla_Y Z + A_{\Omega Z} Y.$$

Дифференцируем вдоль X

$$\nabla_X F\nabla_Y Z + \nabla_X A_{\Omega Z} Y = \nabla_X \nabla_Y FZ =$$
$$= F\nabla_X\nabla_Y Z + A_{\Omega\nabla_Y Z}X + \nabla_X A_{\Omega Z}[X,Y].$$

Так как

$$\nabla_{[X,Y]}FZ = F\nabla_{[X,Y]}Z + A_{\Omega Z}[X,Y],$$

то получим

$$R(X,Y)FZ = \nabla_X\nabla_Y FZ - \nabla_Y\nabla_X FZ -$$
$$-\nabla_{[X,Y]}FZ = F\overline{R}(X,Y)X + (\nabla_X A_{\Omega Z})(Y) -$$
$$-(\nabla_Y A_{\Omega Z})(X) + A_{\Omega\nabla_Y^Z}X - A_{\Omega\nabla_X Z}Y.$$

Используя (2), имеем

$$R(X,Y)FZ = F\overline{R}(X,Y)Z + A_{\nabla_X^{\perp}\Omega Z}Y -$$
$$-A_{\nabla_Y^{\perp}\Omega Z}X + A_{\Omega\nabla_Y Z}X - A_{\Omega\nabla_X Z}Y =$$
$$= F\overline{R}(X,Y)Z + A_{(D_X^{\perp}\Omega)(Z)}Y - A_{(D_Y^{\perp}\Omega)(Z)}X.$$

Пример 1. $f: M \to \overline{M}$ соответствие Петерсона, т.е. касательные плоскости в соответствующих точках параллельны. Тогда [2]

$$\Omega = 0, \alpha^{\mathsf{T}} = 0, \ \det F \neq 0,$$
$$\overline{R}(X,Y) = F^{-1}R(X,Y)FZ,$$
$$\nabla_X Y = F^{-1}\nabla_X FY.$$

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *главные нормали поверхности* $\overline{M}$ *параллельны касательным пространствам к* M *в соответствующих точках;*

2) $(D_X^{\perp}\Omega)(Y) = -\alpha(X,FY)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главные нормали поверхности $\overline{M}$ параллельны касательным пространствам к M тогда и только тогда, когда $\alpha^{\perp}$. Используя (8), получим доказательство теоремы.

Теорема 4. *Если главные нормали поверхности* $\overline{M}$ *параллельны касательным пространствам к* M *в соответствующих точках, то тензоры кривизны* $R, \overline{R}$ *связностей* ∇, ∇ *удовлетворяют соотношениям:*

$$R^{\perp}(X,Y)\Omega Z = \Omega\overline{R}(X,Y)Z +$$
$$+\alpha((\overline{D}_Y F)(Z),X) - \alpha((\overline{D}_X F)(Z),Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 имеем

$$\nabla_Y^{\perp}\Omega Z = \Omega\nabla_Y Z - \alpha(Y,FZ).$$

Дифференцируем вдоль X

$$\nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\Omega Z = \nabla_X\Omega\nabla_Y Z - \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,FZ) =$$
$$= \Omega\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,F\nabla_Y Z) - \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,FZ).$$

Так как

$$\nabla_{[X,Y]}\Omega Z = \Omega\nabla_{[X,Y]}Z - \alpha([X,Y],FZ),$$

то получим

$$R^{\perp}(X,Y)\Omega Z = \Omega\overline{R}(X,Y)Z - \alpha(X,F\nabla_Y Z) +$$
$$+\alpha(Y,F\nabla_X Z) - \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,FZ) +$$
$$+\nabla_Y^{\perp}\alpha(X,FZ) + \alpha([X,Y],FZ).$$

Из (2) имеем

$$\nabla_Y^{\perp}\alpha(X,FZ) - \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,FZ) + \alpha(\nabla_X Y,FZ) -$$
$$-\alpha(\nabla_Y X,FZ) + \alpha(Y,\nabla_X FZ) - \alpha(X,\nabla_Y FZ) = 0.$$

Таким образом,

$$R^{\perp}(X,Y)\Omega Z = \Omega\overline{R}(X,Y)Z + \alpha(Y,F\nabla_X Z) -$$
$$\alpha(X,F\nabla_Y Z) + \alpha(X,\nabla_Y FZ) - \alpha(Y,\nabla_X FZ) =$$
$$= \Omega\overline{R}(X,Y)Z + \alpha(Y,(\overline{D}_X F)(Z)) -$$
$$-\alpha(X,(\overline{D}_Y F)(Z)).$$

Пример 2. M, $\overline{M}$ -n поверхности в E^{2n}, касательные плоскости которых в соответствующих точках ортогональны. Тогда [3]

$$\mathrm{F}=0, \alpha^{\perp}=0.$$

Определено Ω^{-1}. Имеем

$$\overline{R}(X,Y)Z = \Omega^{-1}R^{-1}(X,Y)\Omega Z, \nabla_X Y = = \Omega^{-1}\nabla^{\perp}_X \Omega Y.$$

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2. 414 с.
2. Чешкова М.А. Соответствие Петерсона пары n-поверхностей//Труды международного конгресса "Женщины-математики". Н.Новгород, 1994. Вып. 3. С. 42-46.
3. Чешкова М.А. К геометрии пары ортогональных n-поверхностей в E^{2n}//Сиб.мат.ж. Т. 36. 1995. С. 228-232.